O VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ NO PROBLEMA DE KEPLER PERTURBADO

C. Farina

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

13 de outubro de 2008

Roteiro da Apresentação

1. **Introdução e objetivos**
2. **Forças centrais e o problema de Kepler**
3. **Vetor de Laplace-Runge-Lenz**
4. **Teorema de Bertrand**
5. **Precessão no problema de Kepler perturbado**
6. **Comentários finais e perspectivas**

1 Introdução e objetivos

- Por **problema de Kepler**, entendemos o problema da gravitação universal, no qual uma partícula está sob a ação de uma força central cujo módulo varia com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força.
- Sua história começa na antiguidade; explicar o cosmos sempre foi um desejo dos filósofos antigos e, mais recentemente, dos físicos, matemáticos e astrônomos.
- O problema de Kepler é um dos mais belos de mecânica elementar. Na época de Newton, porém, ele desafiou as mentes mais brilhantes a descobrirem que lei de força levava às órbitas elípticas, tão cuidadosamente observadas por Kepler [a].
- **Teoria da gravitação universal:** Newton aplicou aos céus a mesma física que valia na Terra e chegou na lei do inverso do quadrado.

[a] Trata-se de um **problema inverso**: conhecidas características do movimento, determinar a força. Outros exemplos são o espalhamento de Rutherford e muitos dos experimentos modernos de física de partículas.

- A teoria de Newton explicava as marés e tinha grande poder de predição: desvios na órbita de Urano levaram Le Verrier a prever a existência de Netuno (1846).
- Mas não foi possível explicar desvios na órbita de Mercúrio (Le Verrier 1859) supondo a existência de outro planeta (Vulcano). Aqui, a teoria foi modificada (foram as correções da Relatividade Geral que compatibilizaram a previsão teórica com a **precessão** observada de Mercúrio.
- **Objetivo:** apresentar um método para o cálculo de velocidades de precessão no problema de Kepler perturbado e aplicá-lo em várias situações:
  - contribuição da Relatividade Geral para a precessão de Mercúrio;
  - efeitos da resistência do ar na precessão de satélites terrestres;
  - contribuição newtoniana para a precessão de um dado planeta causada pelos outros planetas do sistema solar.
- No entanto, é conveninente começarmos com uma revisão sobre **forças centrais** e **problema de Kepler**, discutirmos brevemente o **Teorema de Bertrand** e, por fim, introduzirmos o chamado vetor de **Laplace-Runge-Lenz**.

2 Forças centrais

- **Força central** é aquela cuja reta suporte passa por um ponto C, **centro de força**, e cujo módulo só depende da distância entre C e a posição da partícula.
- Sendo $\mathbf{r}$ o vetor-posição da partícula num instante e $\mathbf{r}_C$ o vetor-posição de C, uma força central $\mathbf{F}$ é paralela a $\mathbf{r}-\mathbf{r}_C$ e seu módulo só depende de $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_C|$.
- Escolhendo, por conveniência, a **origem no centro de força**, temos

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{1}$$

onde, como de costume, $\hat{\mathbf{r}}$ significa vetor unitário na direção radial.

- Note que há um **abuso de linguagem** na denominação **força central** para uma força com as características anteriores.
- Partícula sob a ação apenas de uma **força central** $\Longrightarrow$ **simetria esférica** .
- Forças centrais têm propriedades importantes que simplificam muito o problema de encontrar os movimentos possíveis de uma partícula, como veremos a seguir.

- O torque de uma força central relativo ao **centro de força** é nulo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}\,, \tag{2}$$

pois é nulo o produto vetorial de dois vetores paralelos. Uma vez que

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}\,; \qquad \text{onde} \qquad \boldsymbol{\ell} := \mathbf{r} \times m\mathbf{v}\,, \tag{3}$$

vemos que $força\ central \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\ell} = \text{cte.}$

Obs: *Por constante de movimento entendemos uma função de* **r**, **v** *e* t *que tem seu valor constante ao longo de um movimento possível da partícula*.

- A constância da **direção** de $\boldsymbol{\ell}$ implica **movimento plano** para a partícula.
- O fato de que o **sentido** de $\boldsymbol{\ell}$ permanece o mesmo garante que o **sentido de giro** da partícula em torno do centro de força é sempre o mesmo.
- A constância do **módulo** de $\boldsymbol{\ell}$ também nos traz uma informação valiosa e de bonita interpretação geométrica, a ser mostrada adiante (**Lei das Áreas**).

- Como o **movimento é plano**, e devido à simetria existente, é conveniente descrevê-lo com as coordenadas polares (r, φ),

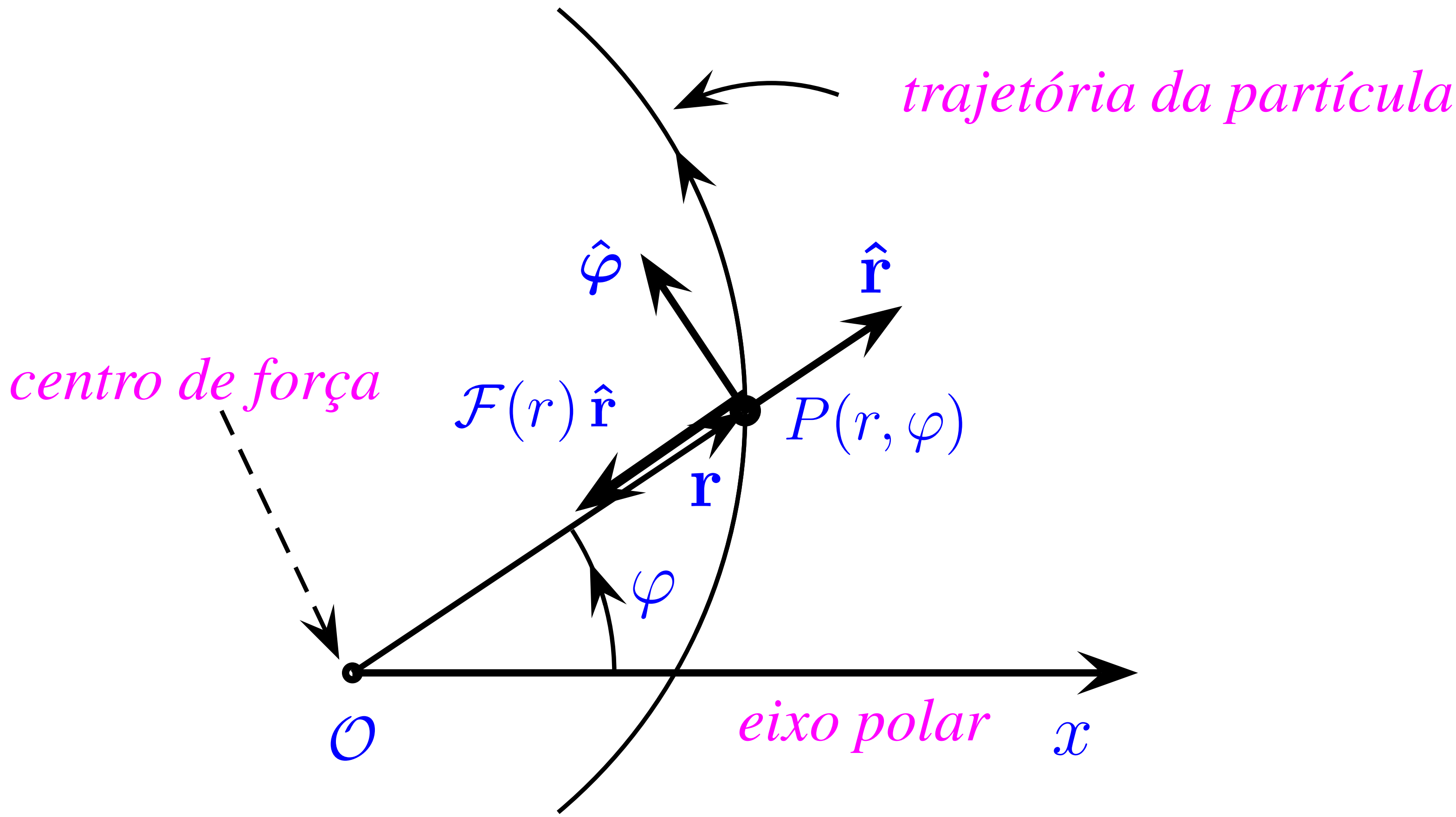

Figura 1: Trajetória genérica da partícula sob a ação de uma **força central** (atrativa).

- O vetor-posição, a velocidade e a aceleração da partícula em termos dos vetores uniários da base polar, $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ tomam a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}} && (4) \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} && (5) \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. && (6) \end{aligned}$$

- O **momento angular** da partícula relativo à origem é dado, então, por

$$\boldsymbol{\ell} \;=\; r\hat{\mathbf{r}} \times m(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \;=\; mr^2\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{7}$$

onde definimos $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\dot{\varphi} > 0$. Com isso, o módulo do momento angular da partícula relativo à origem é dado, em coordenadas polares, por

$$\ell := mr^2\dot{\varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}\,. \tag{8}$$

- Suporemos, neste trabalho, que $\ell \neq 0$, de modo que $\dot{\varphi} \neq 0$. No caso em que $\ell = 0$, os movimentos possíveis são retilíneos e radiais.

- A **constância** de ℓ tem uma interpretação geométrica simples. A Figura 2 mostra as posições da partícula em dois instantes muito próximos, t e $t + \varepsilon$.

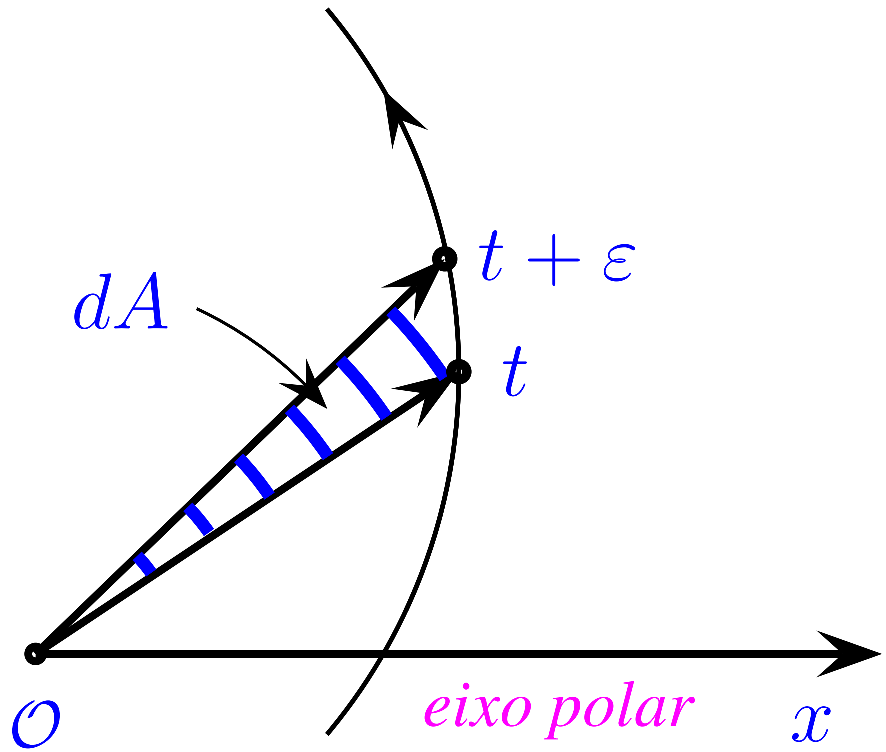

Figura 2: Área infinitesimal dA varrida por $\mathbf{r}$ entre os instantes t e $t + \varepsilon$.

- Uma inspeção na figura anterior mostra que a área dA varrida por $\mathbf{r}$ no intervalo de tempo de duração ε é dada por (área do "triângulo" hachurado)

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \,, \tag{9}$$

de modo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m} \,. \tag{10}$$

Observe que $\dfrac{dA}{dt}$ (chamada **velocidade areolar**) é proporcional ao módulo do momento angular da partícula.

- Como $\ell = Cte$, o raio vetor da partícula varre áreas iguais em tempos iguais, resultado conhecido como Lei das Áreas ou Segunda Lei de Kepler.

- Para um mesmo Δt, o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula quando ela está longe da origem é menor do que quando está perto (como mostra a **Figura 3**)

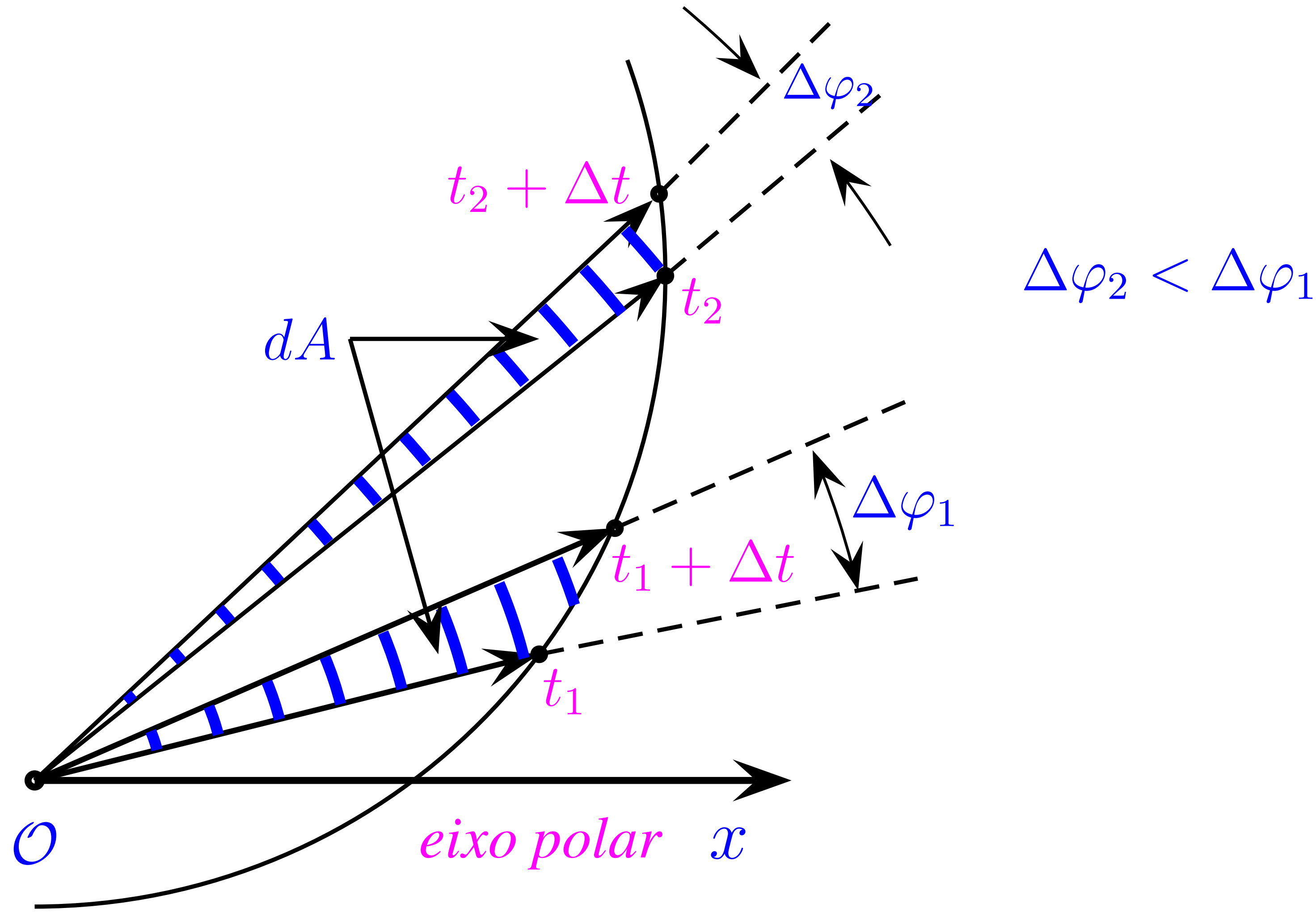

Figura 3: Como a área varrida entre t_1 e $t_1 + \Delta t$ é a mesma que a varrida entre t_2 e $t_2 + \Delta t$, o ângulo $\Delta\varphi_2$ é **menor** do que o ângulo $\Delta\varphi_1$, pois em t_2 a partícula está mais **afastada** da origem.

- Toda força central é conservativa (**a recíproca não é verdadeira**),

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_A}^{r_B} \mathcal{F}(r) dr\,. \tag{11}$$

Dada uma força conservativa, a **diferença** de energia potencial fica univocamente determinada, mas não o valor da energia potencial em um ponto.

- Para especificarmos $U(P)$, devemos escolher um ponto-padrão, P_0, e arbitrar um valor para $U(P_0)$ (mas o que importa são **variações** de U e não os valores de U).

- Na **versão diferencial:** $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathcal{F}(r) dr \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(r) = -dU/dr$
A relação entre uma **força central** $\mathbf{F}$ e a energia potencial associada é, então,

$$\mathbf{F} = -\frac{dU(r)}{dr}\,\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{12}$$

Para uma **força não-central**, mas ainda **conservativa**, temos,

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U\,. \tag{13}$$

No caso particular de uma força central, U é uma função apenas de r, de modo que $\boldsymbol{\nabla} U = (dU/dr)\hat{\mathbf{r}}$ e recaímos na equação (12).

- Quando **só realizam trabalho forças conservativas**, a soma da energia cinética com a potencial (energia mecânica da partícula) é uma constante de movimento,

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U = Cte\,. \tag{14}$$

No caso em questão, em que a **força resultante é central**, escrevemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) \tag{15}$$

2.1 Energia potencial efetiva

- Trata-se de uma quantidade muito útil na **discussão qualitativa** dos movimentos possíveis de uma partícula sob a ação unicamente de uma força central.
- Conveniente no estudo do **movimento planetário**: órbitas limitadas ou ilimitadas, estabilidade de órbitas circulares, oscilações radiais, etc.

- Para movimentos sob a ação de uma força central, o **movimento radial** pode ser estudado de forma análoga à descrita para movimentos unidimensionais:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \left(U(r) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\right) = E - \left(U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right), \qquad (16)$$

onde usamos a relação $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$. Definimos **energia potencial efetiva** como

$$U_{ef}(r) := U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \qquad (17)$$

É justamtne $U_{ef}(r)$, e não $U(r)$, que desempenha para o movimento radial um papel análogo ao desempenhado por $U(x)$ em movimentos unidimensionais.

- Pode-se mostrar que o movimento radial é descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{r} = \mathcal{F}_{ef}(r), \quad \text{onde} \quad \mathcal{F}_{ef}(r) := -\frac{dU_{ef}(r)}{dr} = \mathcal{F}(r) + \frac{\ell^2}{mr^3} \qquad (18)$$

é chamada **força efetiva**. Ou seja, é $-dU_{ef}(r)/dr$, e não $-dU(r)/dr$, que desempenha o papel da força no movimento radial.

- O termo ℓ^2/mr^3 tem o efeito de uma força centrífuga no movimento radial da partícula. A esse termo corresponde, na energia potencial efetiva, o termo $\ell^2/2mr^2$, chamado barreira centrífuga.

- A barreira centrífuga se opõe à aproximação da partícula ao centro de força. Essa oposição desaparece com $\ell = 0$, mas para $\ell \neq 0$ ela impede a partícula de passar pelo centro (a menos que $U(r)$ tenha um termo que vença a ação da barreira).

- **Região classicamente permitida:** $E \geq U_{ef}(r)$.

- Nos pontos em que $U_{ef}(r) = E$ a componente **radial** da velocidade da partícula é nula (**pontos de retorno**). Porém, como $\ell \neq 0$, a velocidade da partícula não é nula nos pontos de retorno, pois $\dot{\varphi} \neq 0$ (a partícula continua orbitando).

- A **Figura 4** mostra o gráfico de uma energia potencial efetiva $U_{ef}(r)$ *versus* r que apresenta um **poço de potencial** e cujas órbitas podem ser limitadas ou ilimitadas, dependendo do valor da energia mecânica da partícula.

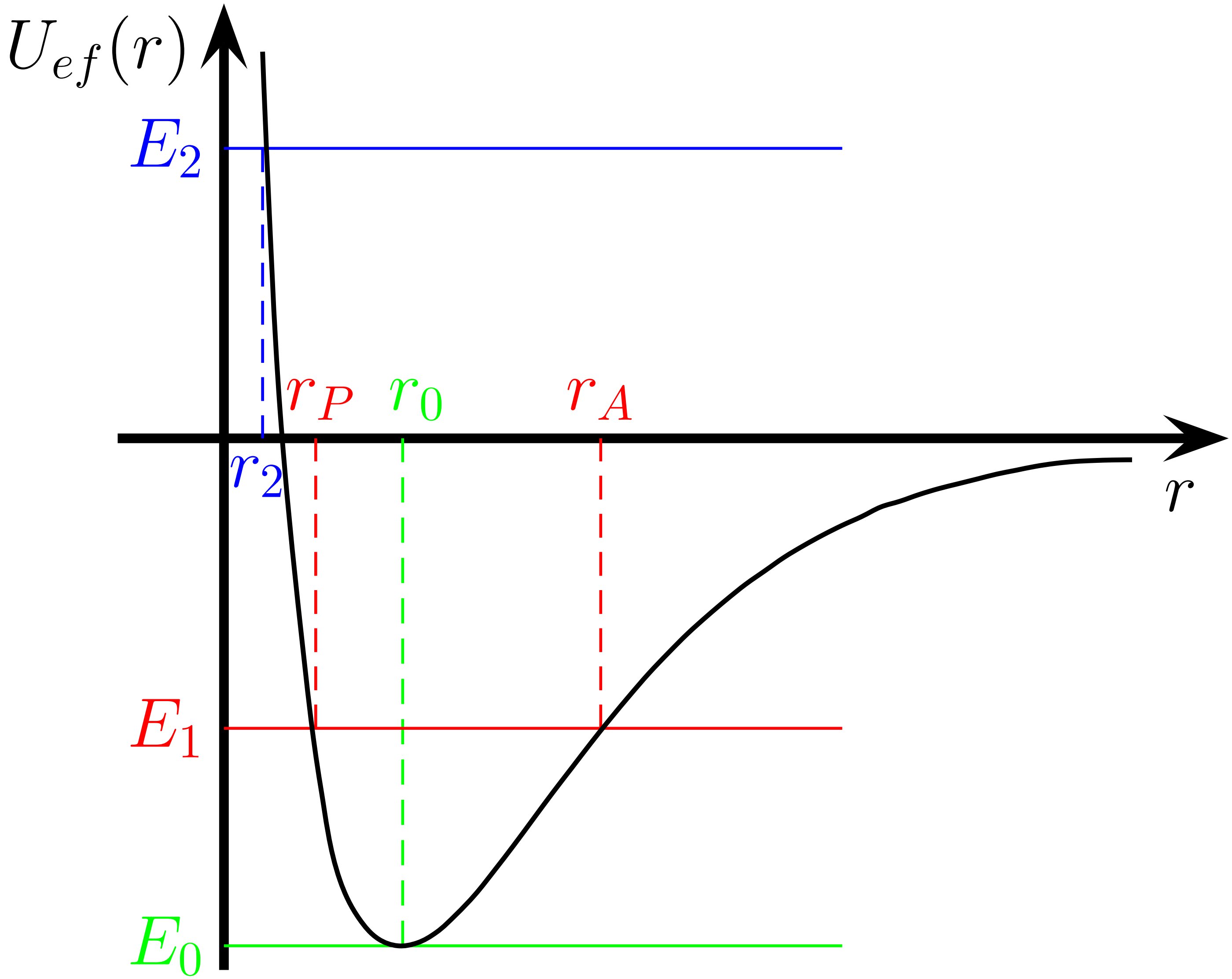

Figura 4: **Energia potencial efetiva** que permite órbita circular, órbitas limitadas não-circulares e órbitas ilimitadas.

- $E = E_1$: movimentos possíveis ocorrem entre r_P (**pericentro**) e r_A(**apocentro**). A velocidade angular máxima ocorre no pericentro e a mínima, no apocentro.

- $E = E_2$: só há um ponto de retorno, r_2; os movimentos possíveis da partícula são ilimitados e sua distância à origem nunca fica inferior r_2.

- $E = E_0$: movimento circular de raio r_0, com velocidade de módulo ℓ/mr_0.

- No exemplo em consideração, podemos afirmar que para $E_0 \leq E < 0$ as órbitas são limitadas, enquanto para $E \geq 0$ elas são ilimitadas.

- A **Figura 5** ilustra uma órbita limitada na qual $E = E_1$. Note que a partícula nunca se aproxima da origem mais do que r_P e nunca se afasta mais do que r_A.

- É oportuno ressaltar que uma órbita limitada não é , necessariamente, fechada.

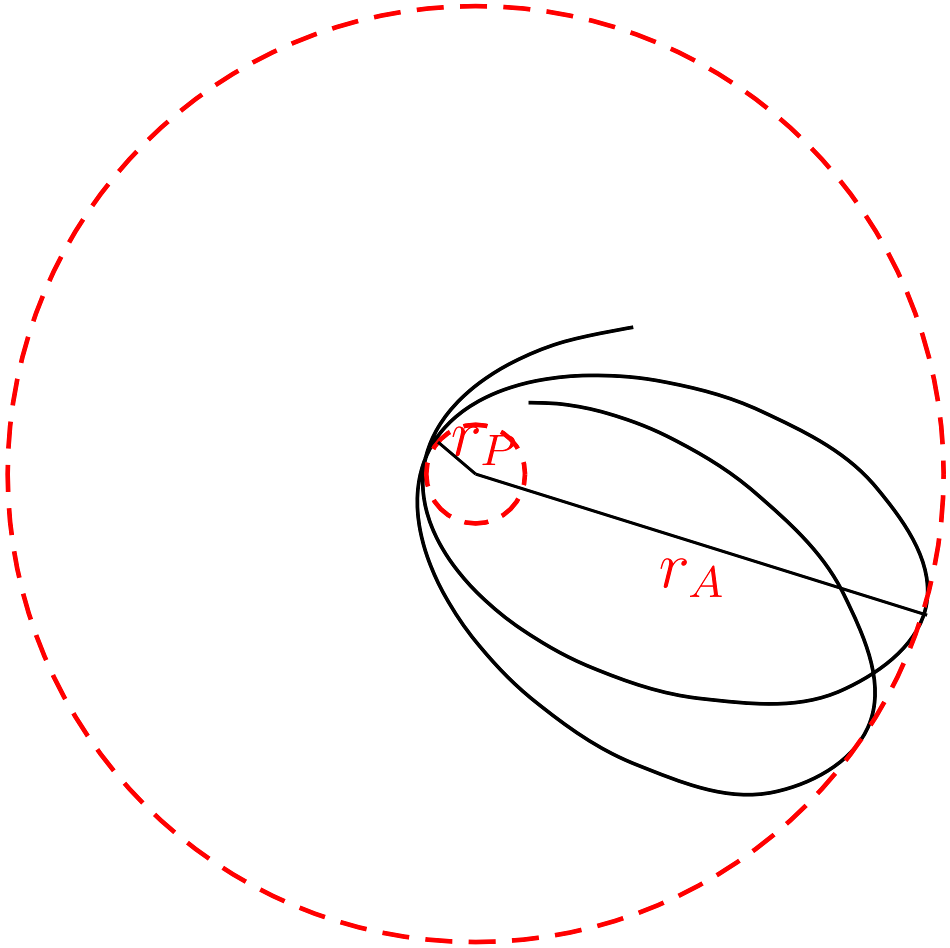

Figura 5: Órbita limitada, **mas não necessariamente fechada**. A partícula se move mantendo sempre uma distância finita à origem e de tal forma que $r_P \leq r \leq r_A$.

- A condição de movimento circular pode ser escrita na forma:

$$U'_{ef}(r_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad U\,'(r_0) = \frac{\ell^2}{m r_0^3} \,. \tag{19}$$

- **Oscilações radiais em torno de r_0**: se a energia for ligeiramente superior a $U_{ef}(r_0)$, a partícula executará pequenas oscilações radiais em torno de $r = r_0$ com período $T_r = 2\pi/\omega_r$, onde a freqüência angular das oscilações é dada por

$$\omega_r := \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 U_{ef}(r)}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}} \,. \tag{20}$$

- **Movimento radial para qualquer E:** da conservação da energia temos

$$\int_{r_i}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}t \,, \tag{21}$$

onde r_i é a distância entre a partícula e a origem no instante $t_i = 0$. De (21) obtemos $t(r)$ que, cuidadosamente invertida, nos fornece $r(t)$.

- De posse de $r(t)$, podemos utilizar a equação $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$ a fim de obter a relação entre o ângulo polar varrido pela partícula e o tempo:

$$\varphi(t) = \varphi_i + \int_0^t \frac{\ell/m}{[r(t')]^2} dt' \ , \tag{22}$$

onde φ_i é o ângulo polar no instante $t_i = 0$. Desse modo, a solução completa do problema fica reduzida às duas quadraturas (21) e (22).

- **Período das oscilações radiais para qualquer valor de E:** supondo que r varie periodicamente com o tempo entre os valores r_P e r_A, é fácil mostrar que

$$\tau_r = \sqrt{2m} \int_{r_P}^{r_A} \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}} \ . \tag{23}$$

- *Um movimento radial periódico não significa que o movimento da partícula seja periódico. Para que isso ocorra, é necessário que a razão entre os períodos de revolução τ_φ e de oscilação radial τ_r seja um número racional.*

- Muitas vezes só queremos obter a equação polar da trajetória. Para relacionarmos diretamente r e φ, utilizamos a equação $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$ para eliminarmos $\dot{\varphi}$ em favor de r e transformar derivadas temporais como segue

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}\,, \tag{24}$$

Substituindo esse resultado em $E = (1/2)m\dot{r}^2 + U_{ef}(r)$, eliminamos o tempo dessa equação e a reescrevemos na forma

$$E = \frac{\ell^4}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + U_{ef}(r)\,. \tag{25}$$

Embora essa equação diferencial seja **não-linear**, é de primeira ordem, o que nos permite calcular φ em função de r por uma simples quadratura,

$$\varphi - \varphi_i = \int_{r_i}^{r} \frac{\ell\, dr'}{r'^2\sqrt{2m[E - U_{ef}(r')]}}\,. \tag{26}$$

2.2 Problema de Kepler

- Nesse caso, temos $U(r) = -k/r$, onde $k = GMm$, sendo G a constante da gravitação, M a massa do Sol e m a do planeta em consideração.
- Para nossos propósitos, como $m/M \ll 1$, consideraremos o Sol fixo na origem.

Obs: *para levarmos em conta o movimento do Sol, basta trabalhar com o conceito de massa reduzida do sistema*.

Usando, na equação anterior, o fato de que $U_{ef}(r) = -k/r + \ell^2/2mr^2$ e, em seguida, fazendo a transformação de variável $r' = 1/u'$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_i &= -\int_{u_i}^{u} \frac{\ell\, du'}{\sqrt{2mE + 2mku' - \ell^2 {u'}^2}} \\ &= -\int_{u_i}^{u} \frac{\ell\, du'}{\sqrt{\left(\frac{mk\varepsilon}{\ell^2}\right)^2 - \left(u' - \frac{mk}{\ell^2}\right)^2}}\,, \end{aligned} \tag{27}$$

onde definimos o parâmetro

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}} \; , \tag{28}$$

cuja interpretação ficará evidente mais adiante. A equação (27) nos sugere a seguinte transformação de variável de integração:

$$u\,' - \frac{mk}{\ell^2} = \frac{mk\varepsilon}{\ell^2}\,\mathrm{cos}\alpha\,' \quad \Longrightarrow \quad \alpha\,' = \mathrm{cos}^{-1}\left[\frac{\ell^2}{mk\varepsilon}\left(u\,' - \frac{mk}{\ell^2}\right)\right] , \tag{29}$$

o que nos leva ao resultado

$$\varphi - \varphi_i = -\int_{\alpha_i}^{\alpha} \frac{-(mk\varepsilon/\ell^2)\,\mathrm{sen}\alpha\,'\,\alpha\,'}{(mk\varepsilon/\ell^2)\left(1 - \mathrm{cos}\alpha\,'\right)^{1/2}} = \int_{\alpha_i}^{\alpha} d\alpha' = \alpha - \alpha_i \; , \tag{30}$$

ou seja,

$$\varphi + \alpha_i - \varphi_i = \alpha = \mathrm{cos}^{-1}\left[\frac{\ell^2}{mk\varepsilon}\left(u - \frac{mk}{\ell^2}\right)\right] . \tag{31}$$

Lembrando que $u = 1/r$, escrevemos

$$\frac{1}{r} - \frac{mk}{\ell^2} = \frac{mk\varepsilon}{\ell^2}\cos(\varphi + \alpha_i - \varphi_i)\,. \tag{32}$$

Escolhendo $\alpha_i - \varphi_i = 0$ (eixo polar como o eixo de simetria da órbita), obtemos,

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2/mk}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,. \tag{33}$$

Trata-se da equação polar de uma cônica de excentricidade ε com **um dos focos** localizados **na origem** do eixo polar. Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad E = -\frac{mk^2}{2\ell^2}\,; \quad \textit{órbita circular} \\
0 < \varepsilon < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0\,; \quad \textit{órbitas elípticas} \\
\varepsilon = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad E = 0\,; \quad \textit{órbita parabólica} \\
\varepsilon > 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad E > 0\,; \quad \textit{órbitas hiperbólicas}\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

2.3 Equação da órbita

- Em vez de determinarmos $r(t)$ e $\varphi(t)$, resolvendo as Eq(s) diferenciais de movimento, eliminamos t e obtemos uma Eq. diferencial para $r(\varphi)$. Usando

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi} \quad \text{e} \quad \ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^4}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2\ell^2}{m^2 r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 , \tag{35}$$

obtemos a equação diferencial da órbita,

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r + \frac{mr^4}{\ell^2}\mathcal{F}(r) . \tag{36}$$

- Com a mudança de variável $u = 1/r$ a equação anterior toma forma

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{\ell^2 u^2}\mathcal{F}\left(\frac{1}{u}\right) , \tag{37}$$

conhecida como equação de Babinet. As soluções $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ dessa equação dão as órbitas possíveis da partícula sob a ação da força central em consideração.

- No problema de Kepler $\mathcal{F}(1/u) = -ku^2$. Nesse caso, a Eq. da órbita se reduz a

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2}\,. \tag{38}$$

cujas soluções, quando escritas em termos de ℓ e E, são da forma dada por (33).

- No problema de um OH isotrópico $\mathcal{F}(1/u) = -k/u$. Nesse caso, temos

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2 u^3}\,. \tag{39}$$

Como no caso das órbitas (limitadas) do problema de Kepler, as soluções dessa equação também são elipses, porém, com o seu **centro geométrico**, e não um de seus focos, localizados **na origem**.

- Conhecida a expressão para $r(\varphi)$, a conservação de ℓ nos permite escrever

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi} [r(\varphi')]^2 d\varphi' = \frac{\ell}{m}(t - t_i)\ , \tag{40}$$

equação que nos fornece, implicitamente, uma expressão para $\varphi(t)$.

3 Teorema de Bertrand

- Uma órbita limitada não é necessariamente fechada. Surge a pergunta:
  que potenciais centrais têm todas as órbitas limitadas são fechadas?
- A palavra "todas" é fundamental, pois dependendo das condições iniciais podemos encontrar órbitas fechadas para uma infinidade de potenciais
- A resposta foi dada por J. L. F. Bertrand (1822-1900) em 1873, resultado conhecido como nome Teorema de Bertrand:

  As únicas forças centrais para as quais todas as órbitas limitadas são fechadas são $\mathbf{F} = -(k/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{F} = -kr\hat{\mathbf{r}}$, com $k > 0$ (ou seja, problemas de Kepler ou do oscilador harmônico isotrópico).
- Em geral, as demonstrações existentes usam métodos perturbativos (para uma demonstração não-perturbativa veja F. Santos *et al*, Arxiv: 0809.2069 (2008)).
- Não demonstraremos esse teorema, mas faremos alguns comentários relevantes.

- Consideremos uma órbita (limitatda) genérica que ocorre entre r_{min}, e r_{max}.
- Desenhamos uma órbita que facilitasse a visualização de $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ e $\Delta\varphi$.

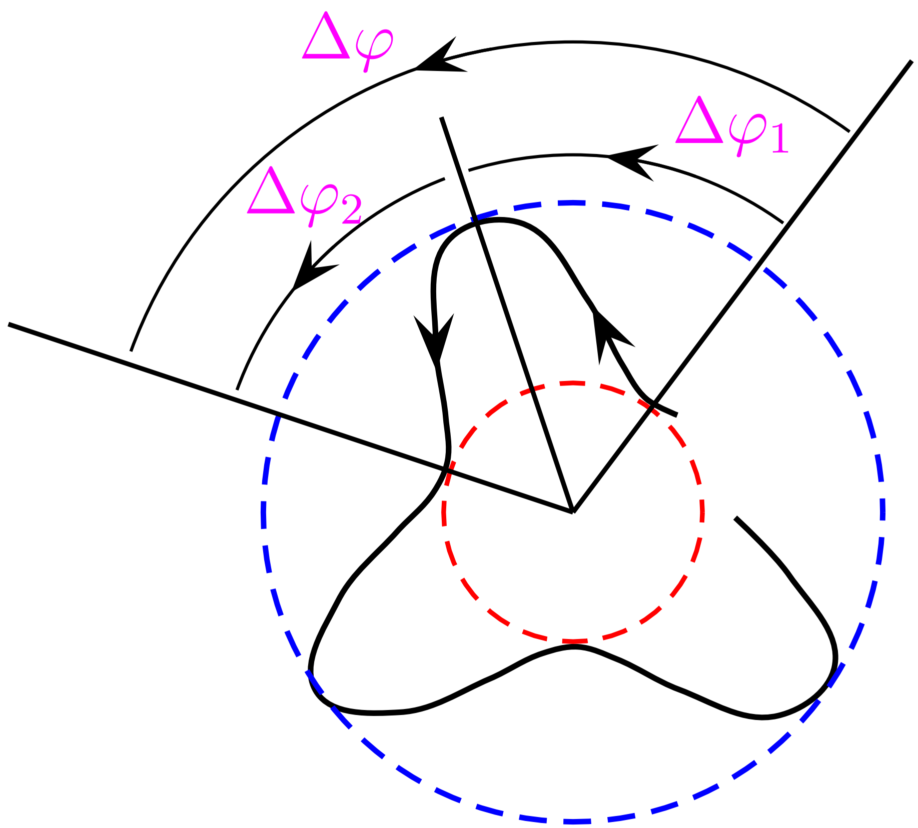

Figura 6: Ângulo $\Delta\varphi$ varrido pelo raio vetor da partícula entre dois pericentros consecutivos. Note que na órbita desenhada há uma **inversão na concavidade**, o que é possível desde que na força haja um termo repulsivo que domine a curtas distâncias.

- O ângulo subentendido por dois pericentros (ou apocentros) consecutivos é

$$\Delta\varphi := \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2\,. \tag{41}$$

Pode-se mostrar que $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$. Com isso, usando a equação (26), obtemos

$$\Delta\varphi \;=\; 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell\, dr}{r^2\sqrt{2m[E-U_{ef}(r)]}} \;=\; 2\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{\ell\, du}{\sqrt{2m[E-W(u)]}}\,, \tag{42}$$

onde $u = 1/r$ e definimos a função W por

$$W(u) := U_{ef}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\ell^2 u^2}{2m} + U\left(\frac{1}{u}\right)\,. \tag{43}$$

- Note que $\Delta\varphi$ é o deslocamento angular da partícula em torno do centro de força ocorrido durante uma oscilação radial (de r_{min} até r_{max} e de volta até r_{min}).

- Uma órbita limitada é **fechada** se, e somente se, após n oscilações radiais da partícula seu deslocamento angular é n' vezes 2π radianos ($n, n' = 1, 2, ..$)

$$n\Delta\varphi = n' 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{n'}{n}2\pi =: \frac{2\pi}{q}\,, \tag{44}$$

Essa condição é o ponto de partida das demonstrações do Teorema de Bertrand.

Procedimento perturbativo:

- inicialmente, consideramos um órbita muito próxima de uma circular, isto é, fazemos $E = E_0 + \Delta E$, onde $E_0 = U_{ef}(r_0)$, sendo r_0 um mínimo de U_{ef}.
- Expandindo $W(u)$ em torno de $u = u_0 := 1/r_0$ e mantendo termos somente até a ordem quadrática em $u - u_0$, ou seja,

$$E - W(u) = E_0 + \Delta E - W(u_0) - W'(u_0) - \frac{1}{2}W''(u_0)(u-u_0)^2\,, \qquad (45)$$

pode-se mostrar, após "algumas" manipulações, que a condição $\Delta\varphi = 2\pi/q$, ($q \in Q^*$), exige que os potenciais admissíveis sejam da forma

$$U(r) = \kappa r^{q^2-2}\,; \quad q \in Q^*\,, \qquad (46)$$

$\kappa < 0$ para $0 < q^2 < 2$ e $\kappa > 0$ para $q^2 > 2$ (2 famílias de energias potenciais).

- $\kappa < 0$ e $0 < q^2 < 2$: **nem todas as órbitas possíveis são limitadas**. Para $E \geq 0$ as órbitas são ilimitadas.
- $\kappa > 0$ e $q^2 > 2$: **todas as órbitas são limitadas**. A energia mecânica é sempre positiva e pode, em princípio, assumir valores indefinidamente grandes.
- Maiores restrições nos potenciais exige ordens mais altas de perturbação.
- Pode-se mostrar que, ao incluirmos os termos de terceira ordem em $u - u_0$, **nenhuma restrição adicional** aparece.
- No entanto, se formos até quarta ordem em $u - u_0$, sobrevivem **apenas** os potenciais de Kepler e do oscilador harmônico isotrópico.
- Como **todas** as órbitas limitadas para esses potenciais já são fechadas, é desnecessário continuar aumentando a ordem de perturbação e fica, então, demonstrado o Teorema de Bertrand.

4 O vetor de Laplace-Runge-Lenz

- Pode-se mostrar que, num sistema de n graus de liberdade há $2n$ constantes de movimento **independentes**[a].

- Pelo menos 1 das constantes de movimento (dentre o número total de constantes de movimento independentes entre si) depende explicitamente do tempo.

- Encontrar uma nova constante de movimento independente das previamente obtidas significa dar um passo no sentido de resolver o problema em questão.

- As simetrias exibidas pelos sistemas físicos sugerem quais são as quantidades conservadas no problema. De fato, simetrias e constantes de movimento estão estreitamente relacionadas.

- Há um poderoso teorema, demonstrado no início do século XX, pela matemática E. Noether, que relaciona simetrias contínuas e constantes de movimento.

---

[a]Por constante de movimento entendemos qualquer função das posições e velocidades das partículas do sistema e, eventualmente, do tempo, que assuma um mesmo valor ao longo de um movimento possível do sistema.

- O teorema de Noether garante que

  > *para cada simetria contínua de um sistema está associada uma constante de movimento. Além disso, conhecida a simetria, o teorema nos fornece uma expressão para a quantidade conservada.*

- Esse teorema é de grande utilidade não apenas em Mecânica Clássica, mas em outras teorias, como por exemplo as teorias clássicas e quânticas de campo.

- Por exemplo, a simetria esférica de um sistema está relacionada com a conservação do momento angular do sistema.

- As simetrias de um sistema também estão relacionadas às chamadas degenerescências presentes no sistema[a].

- Em um problema de força central, duas órbitas congruentes, mas giradas entre si em torno do centro de força, são degeneradas.

---

[a] Um problema em mecânica clássica possui degenerescência quando duas ou mais órbitas diferentes possuem a mesma energia mecânica.

- No entanto, no problema de Kepler há uma degenerescência inesperada. Como $E = -k/(2a)$, onde a é o semi-eixo maior da elipse (um resultado análogo também vale para as órbitas ilimitadas), órbitas com o mesmo semi-eixo maior, têm a mesma energia (e o mesmo período, pela 3^a **Lei de Kepler**).

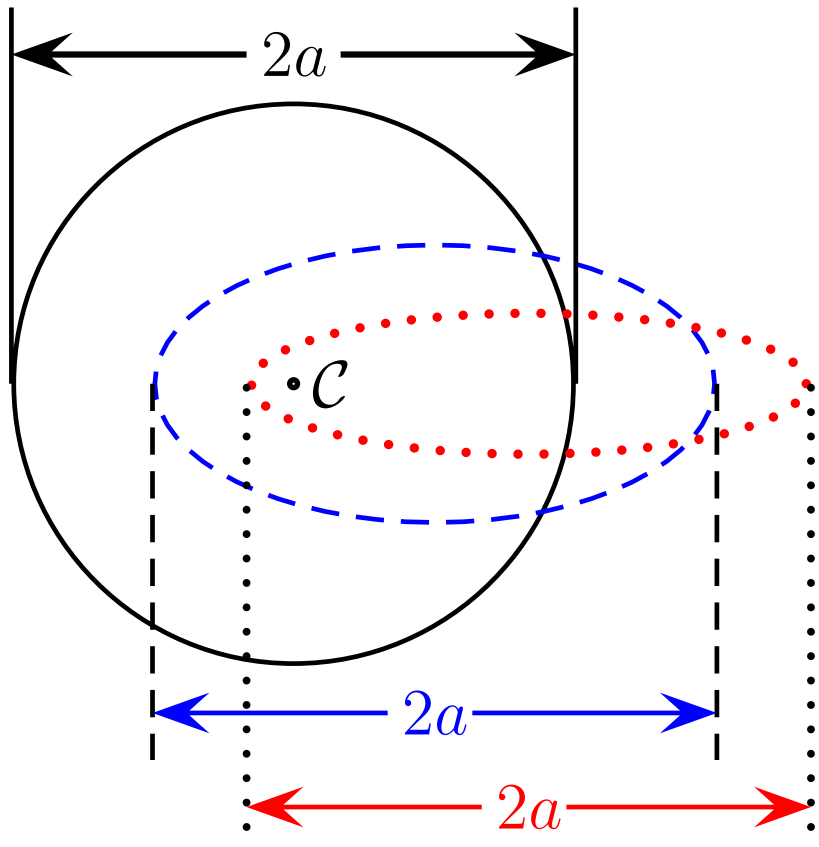

Figura 7: Órbitas degeneradas. O centro do círculo e um dos focos de cada elipse estão no centro de força $\mathcal{C}$.

- Essa degenerescência adicional parece estar relacionada ao fato de a órbita ser fechada (no caso das órbitas parabólicas ou hiperbólicas, ao fato de existir um eixo de simetria para a órbita).

- Isso sugere que busquemos uma constante de movimento que, de alguma forma, esteja relacionada com o fato de a órbita não sofrer precessão

- Essa constante de movimento existe: trata-se do vetor de Laplace-Runge-Lenz,

$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}} \,. \tag{47}$$

  As 3 constantes de movimento A_x, A_y e A_z são independentes entre si, mas estão relacionadas com a energia e o momento angular.

4.1 Um breve histórico

- Nem C. Runge e tampouco W. Lenz foram os 1^{os} a utilizar o vetor $\mathbf{A}$. Nem mesmo P.S. de Laplace, que discutiu em detalhe suas propriedades em 1799, (*Traité de mécanique celeste*), foi o 1^{o} a descobrir que tal vetor é uma constante de movimento no problema de Kepler.

- Em 1924, ao utilizar o vetor $\mathbf{A}$ para calcular níveis de energia no problema de Kepler perturbado (no contexto da mecânica quântica velha), Lenz se referiu a um livro de Runge sobre análise vetorial publicado em 1919.

- Runge mostrou que, se a força central que age na partícula variar com o inverso do quadrado da distância, o vetor $\mathbf{A}$ é uma constante de movimento.

- Em 1926, W. Pauli mostrou como o vetor $\mathbf{A}$ pode ser usado no cálculo do espectro do Hidrogênio por meio de um formalismo matricial da mecânica quântica. Pauli comenta que esse vetor já fôra utilizado por Lenz.

- O nome de Laplace tem sido agregado ao nome desse vetor, pois apresentou uma discussão detalhada sobre o assunto; afirmou que das sete constantes de movimento dadas por E, $\boldsymbol{\ell}$ e $\mathbf{A}$ apenas cinco delas são independentes entre si.

- Laplace deixa claro que, com essas 5 constantes de movimento, é possível obter a equação da órbita, como podemos apreciar lendo suas próprias palavras:

  "Embora essas integrais sejam insuficientes para determinar x, y e z como funções do tempo, elas determinam a natureza da órbita."

- W.R. Hamilton parece ter redescoberto independentemente o vetor **A**. Com efeito, em 1845, Hamilton enviou para a Real Academia da Irlanda o artigo "*Applications of Quaternions to Some Dynamical Questions*", no qual mostrou a existência de uma nova constante de movimento no problema de Kepler.

- Depois de Laplace, e antes de Runge e Lenz, muitos outros utilizaram o vetor **A**: Maxwell, Thomson e Tait, Routh e Gibbs, dentre outros.

- O 1^o a discutir a existência do vetor **A** foi Jakob Hermann, um discípulo dos Bernoulli, que, em 1710, utilizou as novas técnicas de cálculo introduzidas por Leibniz para obter a equação da órbita no problema de Kepler.

- Hermann reconheceu a relação dessa constante com a excentricidade da órbita. No mesmo ano, Hermann escreveu a Johann I. Bernoulli que generalizou o seu resultado (1712) permitindo orientações arbitrárias para a órbita.

- É curioso, para não dizer injusto, que a constante de movimento **A**, descoberta por Hermann e J. I. Bernoulli, seja denominada vetor de Laplace-Runge-Lenz.

4.2 Interpretação do vetor de Laplace-Runge-Lenz

- O vetor de Laplace-Runge-Lenz é, de fato, uma constante de movimento o problema de Kepler. Utilizando a equação de movimento

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,, \qquad (k = GMm)\,, \tag{48}$$

assim com a definição $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - km\hat{\mathbf{r}}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \boldsymbol{\ell} + \mathbf{p} \times \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} - mk\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \\ &= -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times (mr^2\dot{\varphi})\hat{\mathbf{z}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \mathbf{0}\,, \end{aligned} \tag{49}$$

onde usamos o fato de que $\boldsymbol{\ell}$ é uma constante de movimento e $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

- O vetor $\mathbf{A}$ pertence ao plano da órbita:

$$\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\ell} \cdot \left(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A} = 0\,. \tag{50}$$

- Uma segunda relação entre as contantes $\mathbf{A}$, E e $\boldsymbol{\ell}$ pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}) \\
&= (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell})^2 + m^2k^2 - 2mk(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\
&= p^2\ell^2 + m^2k^2 - \frac{2mk}{r}\,\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell})\,.
\end{aligned} \tag{51}$$

Usando a relação $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\ell} = \ell^2$ e a expressão da conservação da energia, $p^2 = 2mE + 2mk/r$, obtemos

$$A^2 = \left(2mE + \frac{2mk}{r}\right)\ell^2 + m^2k^2 - \frac{2mk}{r}\,\ell^2\,, \tag{52}$$

o que nos permite escrever

$$\frac{A^2}{m^2k^2} = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}\,. \tag{53}$$

- Lembrando que $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}$, concluímos que $|\mathbf{A}| = mk\varepsilon$, ou seja, $|\mathbf{A}|$ mede a excentricidade da órbita no problema de Kepler.

- Portanto, das 7 constantes de movimento , E, ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z, A_x, A_y e A_z, somente 5 são independentes entre si.

- **Equação da órbita:** tomando o produto escalar de $\mathbf{A}$ com o vetor-posição da partícula, obtemos

$$r|\mathbf{A}|\cos(\varphi - \varphi_0) = \mathbf{r} \cdot \Big(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}\Big) = \ell^2 - mkr\,, \tag{54}$$

onde φ_0 é o ângulo que $\mathbf{A}$ faz com o eixo polar e usamos, novamente, o fato de que $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}) = \ell^2$. Rearrumando os termos da equação anterior, obtemos

$$r = \frac{\ell^2/mk}{1 + \dfrac{|\mathbf{A}|}{mk}\cos(\varphi - \varphi_0)}\,, \tag{55}$$

Caso ainda não soubéssemos a interpretação de $|\mathbf{A}|$, a última expressão deixaria evidente que $|\mathbf{A}|/mk = \varepsilon$.

- Devido à paridade da função cosseno, vemos que $\mathbf{A}$ tem a direção do eixo de simetria da órbita (seja ela limitada ou ilimitada). Escolhemos, então, o eixo polar na direção do vetor $\mathbf{A}$ ($\varphi_0 = 0$ ou $\varphi_0 = \pi$). Tomando $\varphi_0 = 0$, temos

$$r = \frac{\ell^2/mk}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \quad \text{ou, ainda, na forma} \quad r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\varphi}\,, \tag{56}$$

onde a é o semi-eixo maior da elipse.

4.3 O problema de Kepler perturbado e precessão

- Se considerarmos pequenas perturbações tanto no problema de Kepler quanto no problema do OH isotrópico, as novas órbitas serão parecidas com as antigas, mas sofrerão uma precessão.
- É como se a partícula descrevesse a órbita antiga mas, com o passar do tempo, o eixo de simetria de sua órbita girasse lentamente. A velocidade angular de giro desse semi-eixo é denominada velocidade de precessão da órbita.
- **Objetivo:** tratar o problema de Kepler perturbado e mostrar como podemos utilizar o vetor $\mathbf{A}$ no cálculo da velocidade de precessão da órbita perturbada.

- Consideremos uma partícula de massa m sujeita à força resultante

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{f}\,, \tag{57}$$

onde k é uma constante positiva e $\delta\mathbf{f}$ é uma pequena perturbação ($|\delta\mathbf{f}| \ll k/r^2$) que pode ou não ter o caráter central.

- Utilizando as equações

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{f} \quad \text{e} \quad \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}\,, \tag{58}$$

a taxa de variação temporal $d\mathbf{A}/dt$ no problema perturbado é dada por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} + \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f})\,, \tag{59}$$

- O método a ser apresentado se baseia no fato de que o vetor $\mathbf{A}$ aponta na direção do semi-eixo maior da órbita elíptica (do modo como definimos, no sentido do foco para o perihélio).

- Determinar a velocidade de precessão da órbita significa determinar a taxa temporal com que gira o vetor $\mathbf{A}$. Calcularemos médias temporais em um período da órbita não-perturbada.

- Nos cálculos dos valores médios, poderemos utilizar as relações válidas na órbita não-perturbada. Tomando a média temporal da equação (59), obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle + \langle \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}) \rangle \ , \tag{60}$$

onde, por definição, a média temporal de uma função f no intervalo Δt é

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(t')dt' \, . \tag{61}$$

Caso a função seja periódica, de período τ, a média temporal em um período independe do tempo, de modo que a equação anterior pode ser escrita na forma

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(t')dt' = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t')dt' \, . \tag{62}$$

- É conveniente expressarmos $\langle d\mathbf{A}/dt \rangle$ na forma

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}\,, \tag{63}$$

pois, desse modo, identificamos a velocidade média de precessão como $\mathbf{\Omega}$.

- Nas aplicações que faremos, calcularemos médias de funções periódicas do tipo $f\Big(r(t), \varphi(t)\Big)$. Nesse caso, a equação (61) se reduz a

$$\langle f\Big((r(t), \varphi(t)\Big)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f\Big(r(t), \varphi(t)\Big)\,dt\,. \tag{64}$$

Como não temos as dependências temporais de r e φ, mas apenas a equação da órbita $r(\varphi)$, é conveniente transformar a integração em t numa integração em φ. Fazemos isso com o auxílio da relação $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$:

$$\begin{aligned} \langle f\Big((r(t), \varphi(t)\Big)\rangle &= \frac{1}{\tau}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\,\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \\ &= \frac{m}{\ell\tau}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi) f\Big(r(\varphi), \varphi\Big)\,d\varphi\,. \end{aligned} \tag{65}$$

Aplicações

(a) Correção relativística à precessão de Mercúrio

- Traduzindo em termos de uma força perturbadora, a 1^a correção da teoria de Einstein (Relatividade Geral) à gravitação newtoniana é dada por

$$\delta\mathbf{f} = -3\frac{\beta}{r^4}\,\hat{\mathbf{r}}\ ; \qquad \text{onde} \qquad \beta := \frac{GM\ell^2}{mc^2}\ . \tag{66}$$

Pode-se verificar que $\beta \ll kr_0^2$, sendo r_0 o raio da órbita circular no problema de Kepler não-perturbado para uma partícula com momento angular de módulo ℓ.

- Uma perturbação do tipo, $\delta\mathbf{f} = -\frac{\gamma}{r^4}\,\hat{\mathbf{r}}$, ($\gamma > 0$) também pode representar o efeito do achatamento da Terra sobre órbitas no plano equatorial [a].

Como $\delta\mathbf{f}$ é central, $\mathbf{r}\times\delta\mathbf{f} = \mathbf{0}$, de modo que a equação (60) se reduz a

$$\left\langle\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right\rangle \;=\; \langle\delta\mathbf{f}\times\boldsymbol{\ell}\rangle \;=\; 3\beta\boldsymbol{\ell}\times\left\langle\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^4}\right\rangle \;=\; 3\beta\left\langle\frac{\cos\varphi}{r^4}\right\rangle\boldsymbol{\ell}\times\hat{\mathbf{x}}\,, \tag{67}$$

[a] A restrição de órbitas no plano equatorial se faz necessária pois o achatamento da Terra quebra a simetria esférica e dá origem a forças não-centrais (gera um termo de quadrupolo no potencial gravitacional).

onde, devido à simetria da órbita não-perturbada, usamos o resultado

$$\left\langle \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^4} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + \mathrm{sen}\varphi \hat{\mathbf{y}}}{r^4} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos\varphi}{r^4} \right\rangle \hat{\mathbf{x}}\,, \tag{68}$$

sendo $\hat{\mathbf{x}}$ o vetor unitário ao longo do eixo polar (direção e sentido do vetor $\mathbf{A}$). Utilizando a equação (65) e a equação polar da órbita não-perturbada (56), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\cos\varphi}{r^4} \right\rangle &= \frac{m}{\ell\tau} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^2(\varphi)}\, d\varphi \\ &= \frac{m}{\ell\tau a^2(1-\varepsilon^2)^2} \int_0^{2\pi} \cos\varphi (1+\varepsilon\cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{m}{\ell\tau a^2(1-\varepsilon^2)^2} \int_0^{2\pi} 2\varepsilon \cos^2\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{(2\pi/\tau)m\varepsilon}{\ell a^2(1-\varepsilon^2)^2}\,. \end{aligned} \tag{69}$$

- Substituindo esse resultado em (67), definindo $\omega := 2\pi/\tau$ e multiplicando em cima e em baixo o resultado assim encontrado por k, obtemos.

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left\{ \frac{3\beta\omega}{ka^2(1-\varepsilon^2)^2} \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell} \right\} \times \underbrace{(mk\varepsilon)\,\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{A}}\,, \tag{70}$$

resultado que nos permite identificar a velocidade de precessão média como

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{3\beta\omega}{ka^2(1-\varepsilon^2)^2} \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell}\,; \qquad |\boldsymbol{\Omega}| \approx 43''/sec. \tag{71}$$

- Nesse caso, $\beta > 0$, $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\ell}$ têm mesma direção e mesmo sentido. O ângulo varrido pela partícula entre 2 pericentros consecutivos é **maior** do que 2π.

- Temporalmente, há um atraso na ocorrência do pericentro. No entanto, para $\beta > 0$, o vetor $\mathbf{A}$ gira no mesmo sentido de giro da partícula, o que significa que, espacialmente, há um avanço do pericentro (relativo à órbita não-perturbada).

- No caso onde $\beta < 0$, ocorre exatamente o oposto: temporalmente há um avanço na ocorrência do pericentro, mas espacialmente, há um retrocesso do pericentro (relativo à órbita não-perturbada).

(b) Força de resistência do ar:

- Suponhamos que a força perturbadora causada pela resistência imposta pela atmosfera sobre um satélite artificial terrestre seja dada por

$$\delta\mathbf{f} = -\beta v^{n-1}\mathbf{v}\ , \quad \beta > 0\,, \tag{72}$$

onde $v = |\mathbf{v}|$. Substituindo (72) na expressão de $\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle$, equação (60), temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle &= \left\langle -\beta v^{n-1}\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} \right\rangle + \left\langle m\mathbf{v} \times \left[\mathbf{r} \times (-\beta v^{n-1}\mathbf{v})\right] \right\rangle \\ &= \left\langle -2\beta v^{n-1}\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} \right\rangle\ . \end{aligned} \tag{73}$$

Substituindo a relação $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} = \mathbf{A}/m + k\,\hat{\mathbf{r}}$, na equação (73), obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{2\beta}{m} \left\langle v^{n-1} \right\rangle \mathbf{A} - 2\beta k \left\langle v^{n-1}\hat{\mathbf{r}} \right\rangle\ , \tag{74}$$

onde usamos o fato de que na órbita não-perturbada $\mathbf{A}$ permanece constante. Novamente, devido à simetria da órbita não-perturbada, temos

$$\left\langle v^{n-1}\hat{\mathbf{r}} \right\rangle = \left\langle v^{n-1} \cos\varphi \right\rangle \hat{\mathbf{x}}\,. \tag{75}$$

- Lembrando que $\mathbf{A} = mk\varepsilon\,\hat{\mathbf{x}}$, a equação (74) pode ser escrita na forma

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\lambda(\varepsilon, k, \beta)\,\mathbf{A}\,, \tag{76}$$

onde definimos a constante positiva $\lambda(\varepsilon, k, \beta) = \frac{2\beta}{m\varepsilon}\langle v^{n-1}(\varepsilon + \cos\varphi)\rangle\,.$ Como $\langle d\mathbf{A}/dt\rangle \propto \mathbf{A}$, concluímos que a resistência do ar não causa precessão.

- $\lambda > 0 \implies |\mathbf{A}|$ decresce com o tempo, fazendo com que a excentricidade da órbita perturbada vá diminuindo (a órbita vai tendendo a ficar mais circular).

- Caso particular em que $n = 1$ (resistência do ar é linear com a velocidade):

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{2\beta}{m}(\mathbf{A} + mk\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle)\,. \tag{77}$$

Uma vez que $\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle = \langle\cos\varphi\rangle\,\hat{\mathbf{x}} = -\varepsilon\,\hat{\mathbf{x}}$, temos, nesse caso,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{2\beta}{m}(\mathbf{A} - mk\varepsilon\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}\,. \tag{78}$$

Logo, para $\delta\mathbf{f} = -\beta\mathbf{v}$, o vetor $\mathbf{A} = Cte$ durante o movimento do satélite, ou seja, embora o tamanho de sua órbita vá diminuindo (há dissipação de energia) sua órbita não precessa nem muda de excentricidade.

(c) Precessão de Mercúrio causada pelos outros planetas:

- Desejamos calcular as contribuições (newtonianas) para a precessão de Mercúrio causadas pelos outros planetas do sistema solar.

- A contribuição newtoniana total é muito maior do que a contribuição da teoria da relatividade geral.

- Aproximações e hipóteses simplificadoras:
  - Os planetas que perturbam a órbita de Mercúrio têm órbitas circulares com centro no sol (cujo movimento é desprezado) e em um mesmo plano.
  - Cada um desses planetas será considerado como um anel homogêneo de massa igual à do planeta em consideração.

- Procedimento: calculamos, inicialmente, o potencial gravitacional criado por um anel na posição de Mercúrio e, desse modo, obtemos a força perturbadora de cada planeta. Aplicamos, então, o método baseado no vetor de Laplace-Runge-Lenz.

- A **Figura 8** mostra a órbita (elíptica) de Mercúrio e a órbita circular de um planeta perturbador apenas (totalmente fora de escala!). O potencial do anel na posição de Mercúrio é dada por

$$\Phi_p(\mathbf{r}) = -G \int_{anel} \frac{\lambda_P \, ds}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} \; ; \qquad \lambda_p = \frac{M_p}{2\pi r_p} \, . \tag{79}$$

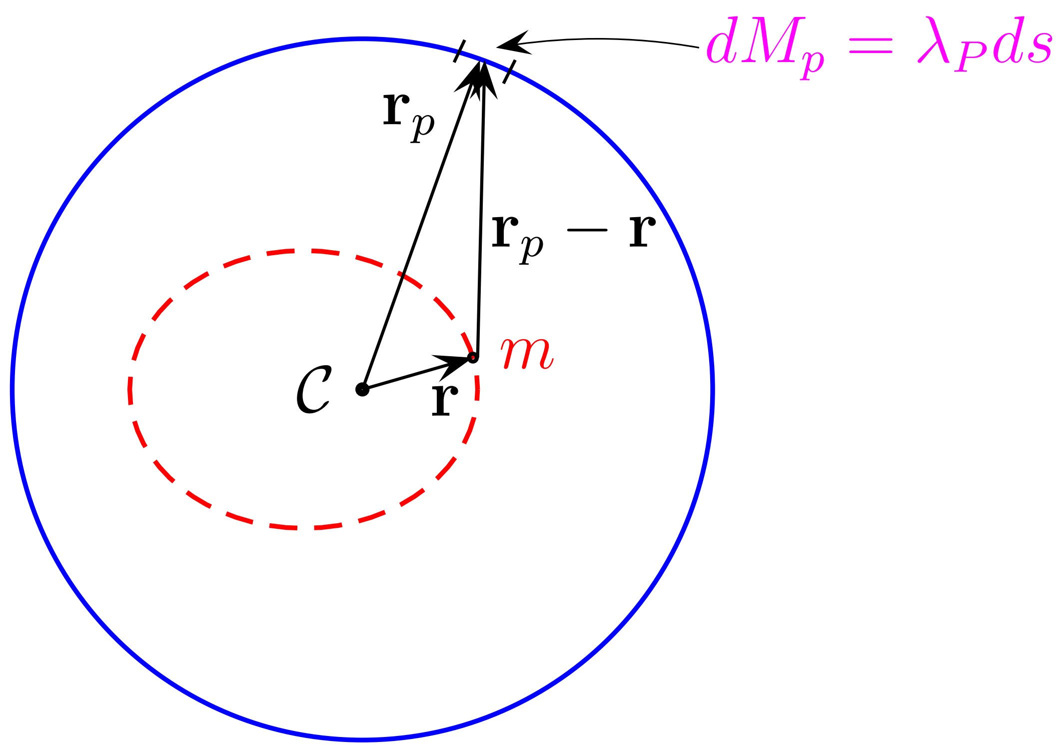

Figura 8: Órbita elíptica de Mercúrio. Anel circular representando o planeta perturbador de massa M_p.

- Definindo $\alpha = r/r_p$ e φ como o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_p$, reescrevemos $\Phi(\mathbf{r})$ como

$$\Phi(r) = -\frac{GM_p}{\pi r_p} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\varphi}} . \tag{80}$$

Após uma pequena manipulação, a expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\Phi(r) = -\frac{GM_p}{\pi r_p} K(\alpha) , \tag{81}$$

onde K é a função elíptica de 1^a espécie, definida por

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \,\mathrm{sen}\theta}} . \tag{82}$$

- Para calcularmos a força perturbadora $\delta\mathbf{f} = -m\nabla\Phi$, utilizaremos a identidade

$$\frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{E(\alpha)}{1-\alpha} - K(\alpha)\right] , \tag{83}$$

onde E é a função elíptica de 2^a espécie, definida por

$$E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha^2 \,\mathrm{sen}\theta}\; d\theta . \tag{84}$$

- A força perturbadora causada pelo planeta sobre Mercúrio é dada, então, por

$$\delta\mathbf{f} = -m\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} = -m\frac{\partial\Phi(r)}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\alpha}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{85}$$

o que nos fornece o resultado final

$$\delta\mathbf{f} = \frac{2GM_p m}{\pi r_p^2}\frac{1}{\alpha}\left[\frac{E(\alpha)}{1-\alpha} \;-\; K(\alpha)\right]\hat{\mathbf{r}}\,, \qquad \alpha = \frac{r}{r_p}\,. \tag{86}$$

- Aplicando o método baseado no vetor $\mathbf{A}$ para essa força perturbadora, obtemos a velocidade de precessão causada em Mercúrio por um planeta qualquer, a saber,

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{2M_p}{\tau\pi\varepsilon r_p M}\int_0^{2\pi} r(\theta)\left[\frac{E(\alpha)}{1-\alpha^2} \;-\; K(\alpha)\right]\cos\theta\, d\theta \;\; \hat{\boldsymbol{\ell}}\;\;, \tag{87}$$

onde τ é o período de Mercúrio, M é a massa do Sol e $r(\theta) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\, cos\theta}$.

- Avaliando numericamente a expressão anterior, podemos obter as contribuições newtonianas de cada planeta para a precessão de Mercúrio (tabela a seguir):

A expressão cálculo exato aqui significa fazer o cálculo levando-se em conta que as órbitas planetárias são elípticas e que estão em planos diferentes.

Planeta	Ω (segundos/sec)	Cálculo exato
Venus	292,65	277,37
Terra + Lua	95,83	90,92
Marte	2,38	2,48
Júpiter	156,84	154,09
Saturno	7,57	7,32
Urano	0,14	0,14
Netuno	0,04	0,04
Total	555,45	532,36

- Contribuição newtoniana para a precessão de um certo planeta causada por outro planeta que tenha uma órbita de raio menor do que a sua:

$$\Phi'_p(r) = \frac{2GM_p}{\pi r} K(\alpha')\,; \quad \Longrightarrow \quad \delta\mathbf{f} = -\frac{2GmM_p}{\pi r^2}\left(\frac{E(\alpha')}{1-\alpha'^2}\right), \quad \alpha' = \frac{r_p}{r}. \tag{88}$$

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{2M_p}{\pi\tau M\varepsilon}\int_0^{2\pi}\left(\frac{E(\alpha')}{1-\alpha'^2}\right)\cos\theta\; d\theta\;\hat{\boldsymbol{\ell}} \tag{89}$$

Planeta	Ω (s/sec)-cont. de **TODOS** os planetas	Ω−Relatividade(s/sec)
Mercúrio	555,45	43
Venus	1207,59	8,5
Terra + Lua	1280,00	3,8
Marte	3358,00	1,4
Júpiter	752,25	0,06
Saturno	1887,43	0,01
Urano	277,11	0,002
Netuno	71,99	0,0008

5 Comentários finais

- Apresentamos, inicialmente, um estudo sobre movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, com particular atenção para o problema de Kepler.
- Enunciamos o Teorema de Bertrand e fizemos alguns comentários sobre uma de suas demonstrações.
- Introduzimos o vetor de Laplace-Runge-Lenz no problema de Kepler e mostramos que se trata de uma constante de movimento (vetorial) que aponta na direção do eixo de simetria da cônica e cujo módulo dá a sua excentricidade.
- No problema de Kepler perturbado, apresentamos um método de cálculo de velocidades de precessão e fizemos aplicações: (a) correção da relatividade geral; (b) efeitos da resistência do ar e (c) contribuições dos outros planetas.
- Vários outros problemas podem ser analisados com esse método: partículas carregadas em campo magnético, efeitos da reação de radiação (pode-se mostrar, nesse caso, que **não há precessão**), etc.

- O método pode ser aplicado para órbitas com qualquer excentricidade e é muito conveniente para perturbações não-centrais.
- Vale comentar que as aplicações do vetor de Laplace-Runge-Lenz não se restringem ao contexto da Mecânica Clássica; esse vetor tem aplicações bem interessantes também em Mecânica Quântica (átomo de Hidrogênio, ..).
- **Perspectivas de trabalho:**
  - estudar métodos alternativos de cálculo de precessão e estabelecer a equivalência entre eles (incluindo o que acabamos de discutir).
  - desenvolver um método análogo para o OH isotrópico perturbado (definir um vetor na direção de um dos dois eixos de simetria e calcular sua taxa de giro)
  - aplicar o método a outros problemas, em particular, ao estudo da precessão de órbitas de satélites terrestres não-equatoriais.
  - estudar as possíveis aplicações do vetor de Laplace-Runge-Lenz no problema do átomo de Hidrogênio perturbado.

6 Bibliografia

1. J. Bertrand, *Mécanique analytique*, C.R. Acad. Sci. **77**, 849 (1873).
2. Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, 2004), pg 35.
3. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978), pg 37.
4. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, New York, 1981), Apêndice, pg 601.
5. J.V. José e E.J. Saletan, *Classical Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1998), pg 88.
6. Lowell S. Brown, *Forces giving no orbit precession*, Am. J. Phys. **46**, 930 (1978).
7. Yoel Tikochinsky, *A simplified proof of Bertrand's theorem*, Am. J. Phys. **56**, 1073 (1988).
8. Y. Zarmi, *The Bertrand theorem revisited*, Am J. Phys. **70**, 446 (2002).
9. R.P. Martínez-Romero, H.N. Núñez-Yépez e A.L. Salas-Brito, *Comment on "The Bertrand theorem revisited"*, Am. J. Phys. **70**, 1059 (2002).
10. C. Farina, *On the Lissajous figures for orbits*, Am. J. Phys. **53**, 903 (1985).
11. Herbert Goldstein, *Prehistory of the "Runge-Lenz" vector*, Am. J. Phys. **43**, 737 (1975).
12. Herbert Goldstein, *More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector*, Am. J. Phys. **44**, 1123 (1976).
13. Jean Sivardière, *Precession of elliptic orbits*, Am. J. Phys. **52**, 909 (1984).

14. C.E. Aguiar e M.F. Barroso, *The Runge-Lenz vector and perturbed Rutherford scattering*, Am. J. Phys. **64** (1996) 1042.

15. K.T. McDonald, C. Farina e A.C. Tort, *Right and Wrong Use of the Lenz Vector for Non-Newtonian Potentials*, Am. J. Phys. **58** (1990), 540.

16. C. Farina e A.C. Tort, *A Simple Way of Evaluating the Speed of Precession of Orbits*, Am. J. Phys. **56** (1988) 761.

17. A. Tort, C. Farina e O.M. Ritter, *Perturbed Isotropic Harmonic Oscillator*, Eur. J. Phys. **10** (1989) 220.

18. D.E. Rutherford, *Classical Mechanics*, University Mathematical Texts; traduzido para o castellano por Editorial DOSSAT, S.A., Madrid.

19. W. Pauli, Z. Phys. **36**, 336 (1926); traduzido em *Sources of Quantum Mechanics*, editado por B.L. Van der Waerden (Dover, New York, 1968, pag. 387).

20. S. Borowitz, *Fundamentals of Quantum Mechanics; Particles, Waves and Wave Mechanics* (W.A. Benjamin, 1967).

21. L.I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Companies 1968).