

# ESPIRAIS

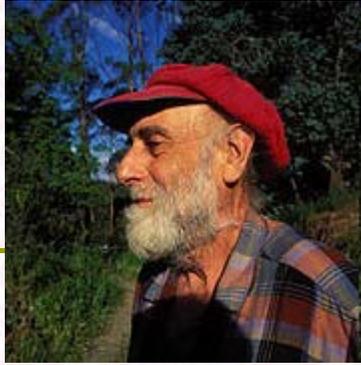


Joaquim Lopes Neto

Instituto de Física – UFRJ

Mestrado Profissional em Ensino de Física-

17-11-2008



*For me, the spiral is the symbol of life. I believe the spiral is found wherever matter ceases to be [inanimate] and starts to become something living.*

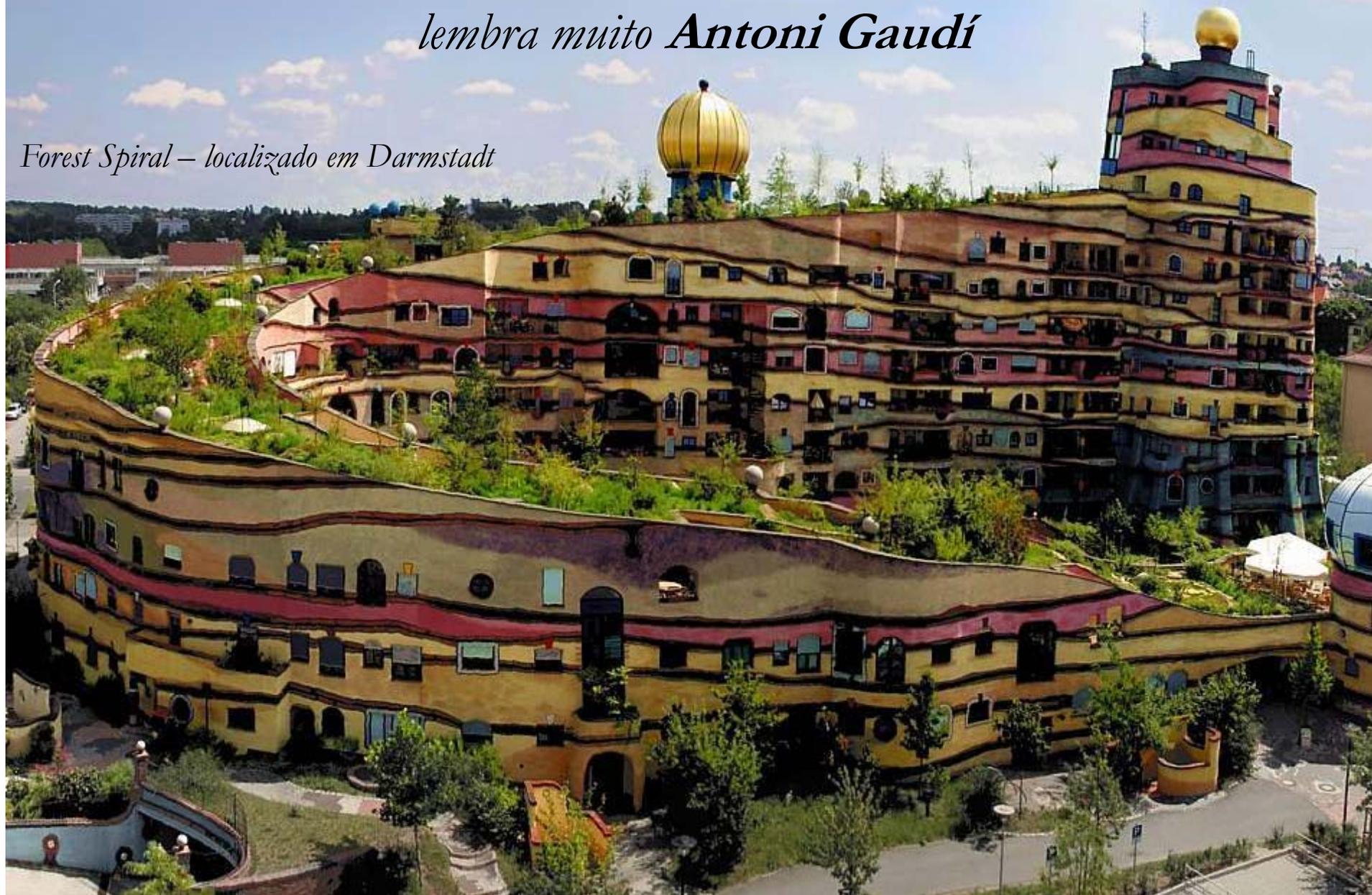
Friedensreich  
Hundertwasser  
(1928-2000), artista e  
arquiteto austríaco.

**"Iriñaldea im Balkan" (1971/72)**



*Hundertwasser rebelou-se contra as “linhas retas opressivas.”  
Daí, sua adoração por espirais. Na arquitetura e mosaicos,  
lembra muito **Antoni Gaudí***

*Forest Spiral – localizado em Darmstadt*



# A Espiral de Arquimedes

---

Uma espiral é uma curva plana que surge como resultado do movimento de um ponto afastando-se (aproximando-se) de um centro, combinado com uma rotação em torno do referido centro.

Se a velocidade de afastamento (aproximação) for constante, igual a  $v$ , e a velocidade de rotação,  $\omega$ , também for constante, então teremos uma espiral de Arquimedes

Sua equação expressa em coordenadas polares é

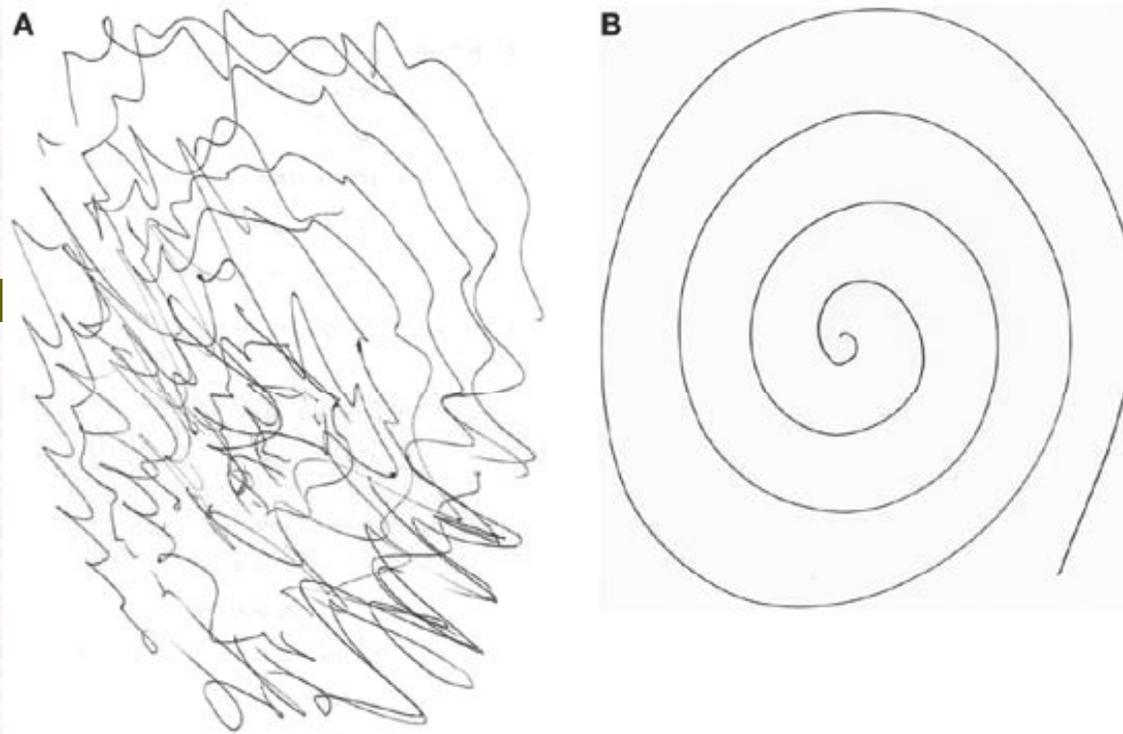
$$r = a\theta$$

onde

$$a = \frac{v}{\omega}$$



**Figure 4** Archimedean spirals drawn by individuals with and without essential tremor



Benito- León J and Louis ED (2006) Essential tremor: emerging views of a common disorder  
*Nat Clin Pract Neurol* 2: 666–678 10.1038/ncpneuro0347

# Os Anéis de Jade

---

Diz um provérbio chinês: “Mais vale ser jade em pedaços que uma peça de cerâmica inteira”.

A jade tinha grande importância entre os chineses. Vamos relatar um trabalho curioso envolvendo anéis de jade e as espirais, publicado na revista Science em 2004, por Peter Lu, um pós-doc em Física da Universidade de Harvard, EUA.

Uma colega mostrou a ele um desses anéis no Smithsonian Institution e ele apostou com ela que poderia fazer aquelas ranhuras com uma furadeira de arco de corda (bow drill).



# Os Anéis de Jade

---

Os anéis, eram associados, pela sua forma circular, ao céu ou à esfera celestial. Acompanhavam o morto na imortalidade e aparecem nos túmulos funerários.

O anel ao lado, com ranhuras espirais, abaixo tem 27 milímetros de diâmetro.



# Os Anéis de Jade

---

As ranhuras espirais gravadas em anéis rituais de jade encontrados enterrados em tumbas datando do período de Primavera e Outono da China (771–475 AC) seguem a forma descrita pela espiral de Arquimedes (287-212 AC). Especialistas acreditam que as ranhuras foram gravadas à mão.



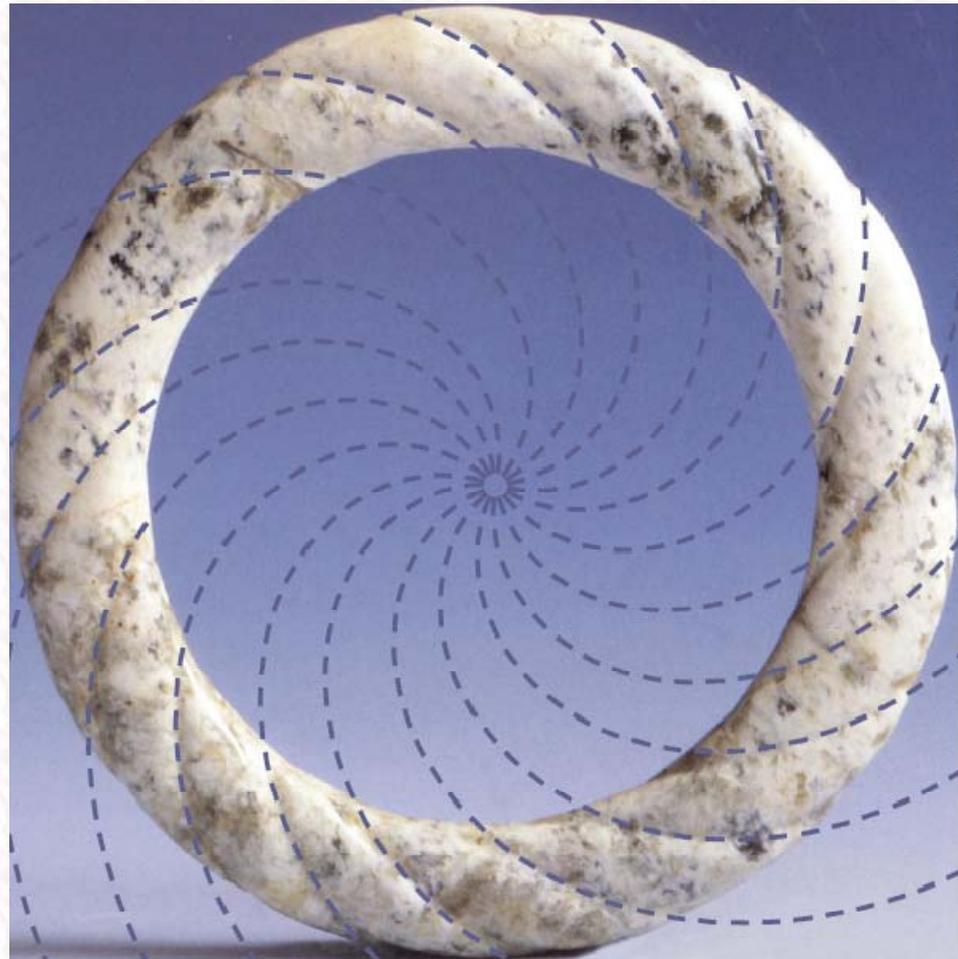
# Os Anéis de Jade

---

O Dr Peter Lu, sustenta, em seu trabalho, que os anéis de 2.550 anos devem ter sido feitos por uma “máquina composta” de precisão.

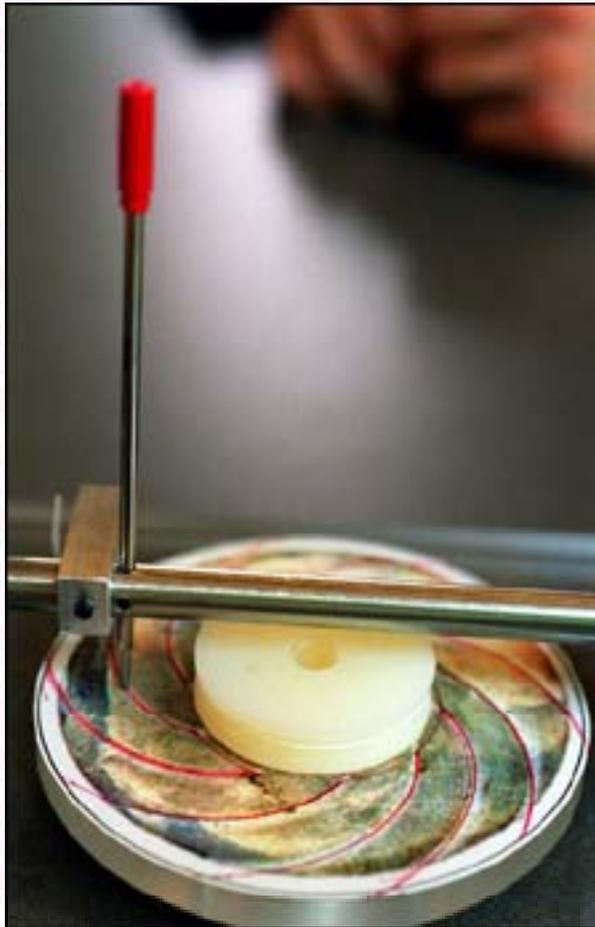
As ranhuras espirais, segundo ele, são visivelmente mais uniformes que outros padrões gravados em peças de jade antigas.

Os anéis estudados datam de 550 AC, portanto, 300 anos antes de Arquimedes ter existido.

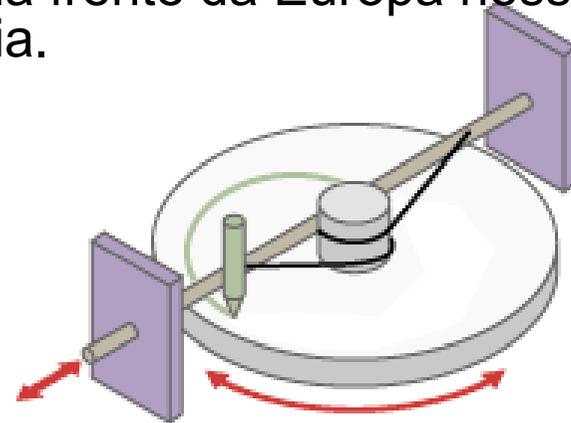


# Os Anéis de Jade

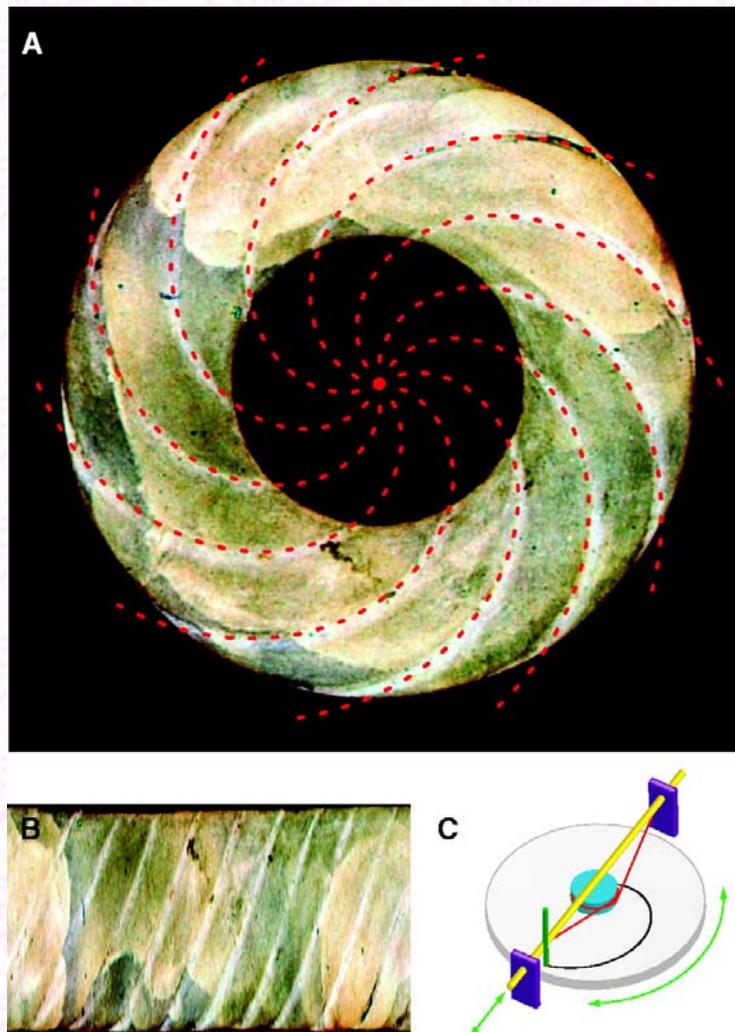
---



As referências históricas mais antigas a máquinas compostas que inter-convertem movimento linear e rotacional com precisão, vêm dos escritos atribuídos a Heron de Alexandria, datados do Primeiro Século DC. Logo, os chineses estariam, aparentemente, meio milênio na frente da Europa nessa tecnologia.



**Fig. 1. (A) Jade ring M1: 7 from Tomb 1 of the Chu minister at Henan Xichuan Xiasi (552 B.C.); diameter, 27 mm (1)**



**P. J. Lu Science 304, 1638 (2004)**

# Newton e a espiral logarítmica

*A espiral logarítmica aparece em três proposições nos “Principia” de Newton: Proposição IX, Livro I Proposições XV e XVI, Livro II*

*Proposição IX. Problema IV. Se um corpo move-se numa espiral PQS, cortando todos os raios SP, SQ, &c, num dado ângulo, propõe-se encontrar a lei da força centrípeta tendendo ao centro dessa espiral.*

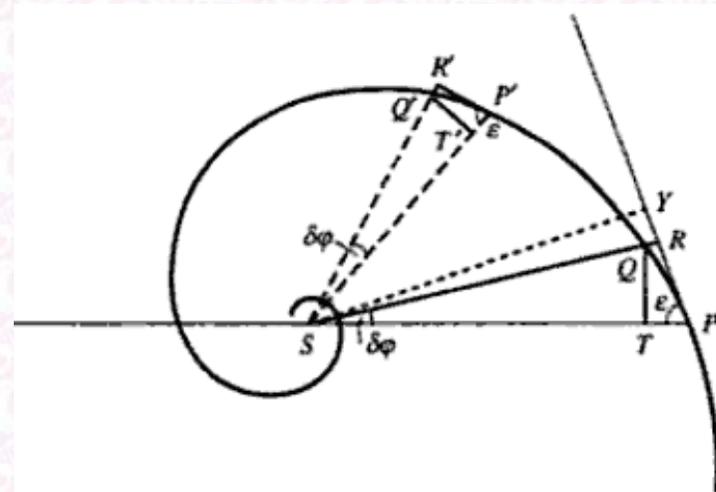
A equação que define a curva é, portanto,

$$\cot \varepsilon = -\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{du}{ud\varphi}$$

onde  $u = r^{-1}$ . A solução desta equação é

$$u = \exp(\varphi \cot \varepsilon)$$

onde a constante de integração foi absorvida em  $u$ . Esta é a espiral logarítmica ou equiangular.



# Newton e a espiral logarítmica

---

A equação da órbita é

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\mu}{u^2 l^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

Substituindo nesta equação a a forma de para a exponencial logarítmica, temos

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = (\cot^2 \varepsilon + 1)u = (\operatorname{cosec}^2 \varepsilon)u = -\frac{\mu}{u^2 l^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

de onde tiramos que

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{l^2}{\mu \operatorname{sen}^2 \varepsilon} u^3$$

ou, finalmente,

$$f(r) = -\frac{l^2}{\mu \operatorname{sen}^2 \varepsilon} \frac{1}{r^3}$$

A força central que pode gerar uma órbita na forma de uma espiral logarítmica é uma força atrativa que varia com o inverso do cubo da distância.

# Newton e a espiral logarítmica

---

*PROPOSITION XV. THEOREM XII. If the density of a medium in each place thereof be inversely as the distance of the places from an immovable centre, and the centripetal force be as the square of the density: I say, that a body may revolve in a spiral which cuts all the radii drawn from that centre in a given angle.*

Aqui está implícito que a força tangencial resistiva é proporcional a  $\rho v^2$

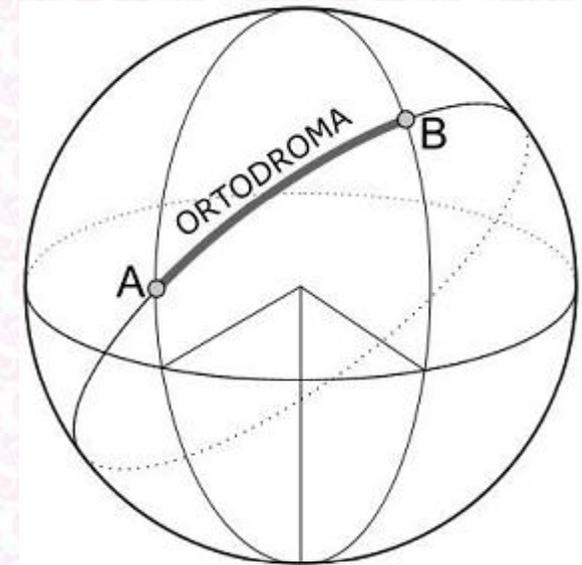
*PROPOSITION XVI. THEOREM XIII. If the density of the medium in each of the places be inversely as the distance of the places from the immovable centre, and the centripetal force be inversely as any power of the same distance: I say, that a body may revolve in a spiral which cuts all the radii drawn from that centre in a given angle.*

# A linha de rumo constante

---

A origem do estudo da espiral logarítmica está relacionado às grandes navegações dos séculos XVI e XVII, como veremos agora.

Os navegadores sabiam que sobre a superfície terrestre a distância mais curta entre dois pontos é um arco de círculo máximo. Para seguir uma tal rota, no entanto, é necessário realizar contínuas mudanças de direção. O ideal seria, com o auxílio de uma bússula, manter a constância do azimute. Porém, a curva que o navio seguiria não era conhecida. A linha de rumo constante foi batizada mais tarde por Snell de luxodromia (Grego, *loxos* = *oblíquo*, *dromos* = *rumo*, foi introduzida por Snell).



# A linha de rumo constante

---

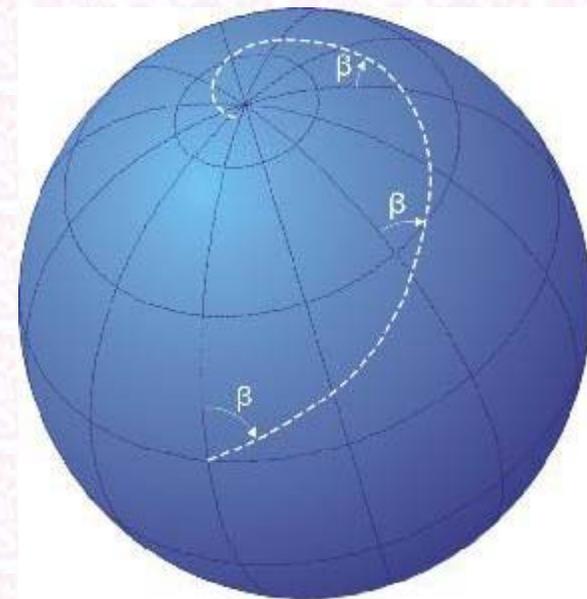
O que Colombo fez para chegar ao Novo Mundo foi seguir um paralelo de latitude das Ilhas Canárias na costa da África até avistar terra. Esta não era a rota mais curta, mas ela tinha a imensa vantagem de ser navegável – calcular a latitude era mais simples, observando a declinação do Sol e da estrela Polar.



# A linha de rumo constante

---

**Pedro Nunes (1502-1578)**, famoso geógrafo, matemático português, cosmógrafo real, demonstrou em 1546 que seguir a rota loxodrômica não permite a um navio dar a volta ao mundo regressando ao ponto de partida. Nunes demonstrou que a curva percorrida vai se aproximando do pólo, em torno do qual dá infinitas voltas sem nunca chegar a ele.

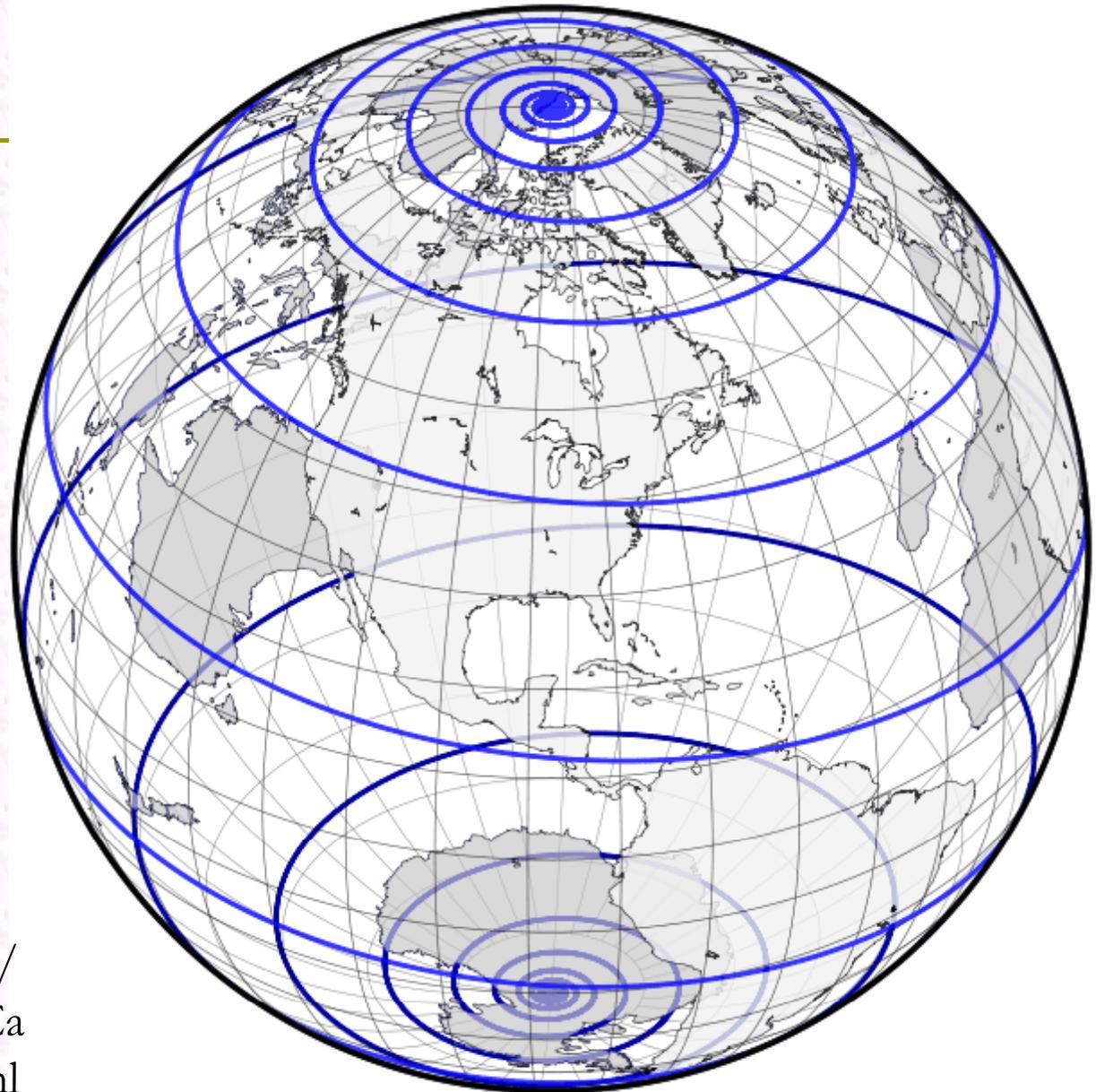


# Loxódroma

---

Ao lado, a loxódroma que passa por Campinas. O ângulo de rumo é de  $275^\circ$ .

<http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/CarthProp/Rhumb/rhumb.html>



# Sphere spirals, 1958, MC Escher

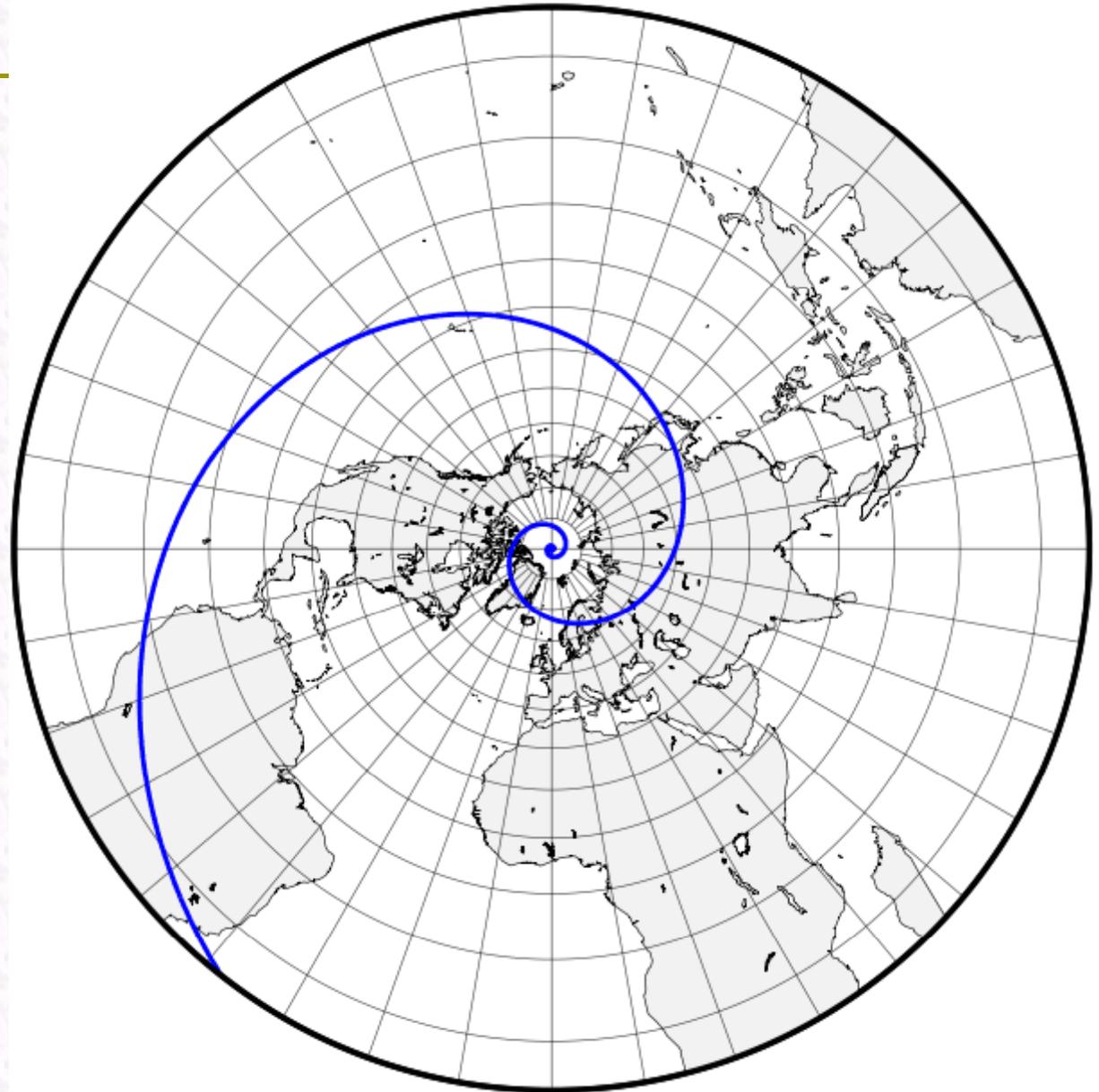
---



# Loxódroma

---

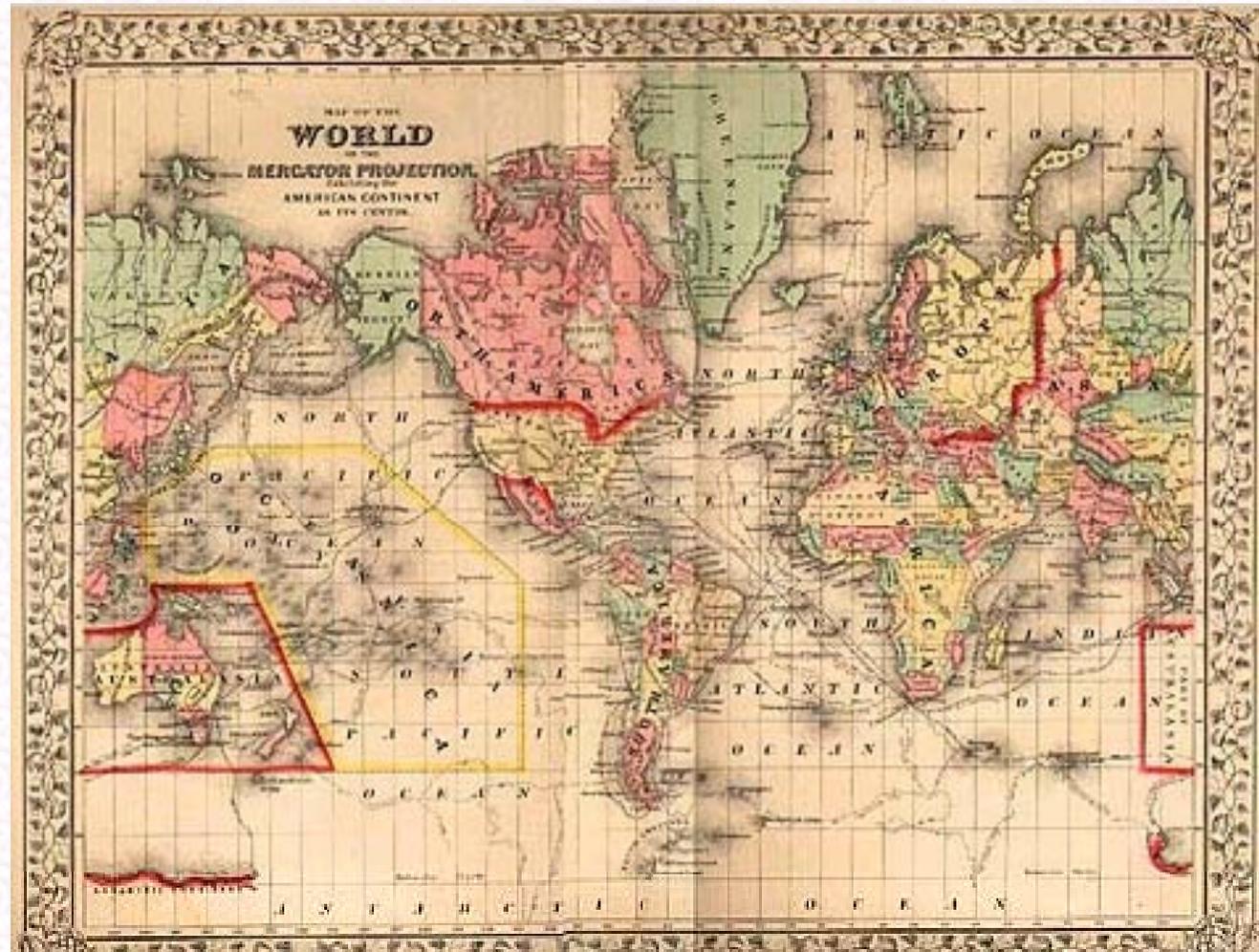
A projeção estereográfica da linha loxodrômica no plano tangente ao polo é a espiral logarítmica, um resultado que foi demonstrado por Edmond Halley.



# Projeção de Mercator

---

*A descoberta da loxodromia teve um efeito decisivo na visão do mundo. Foi a partir daí que nasceu a célebre carta de latitudes crescidas de Mercator (1569).*

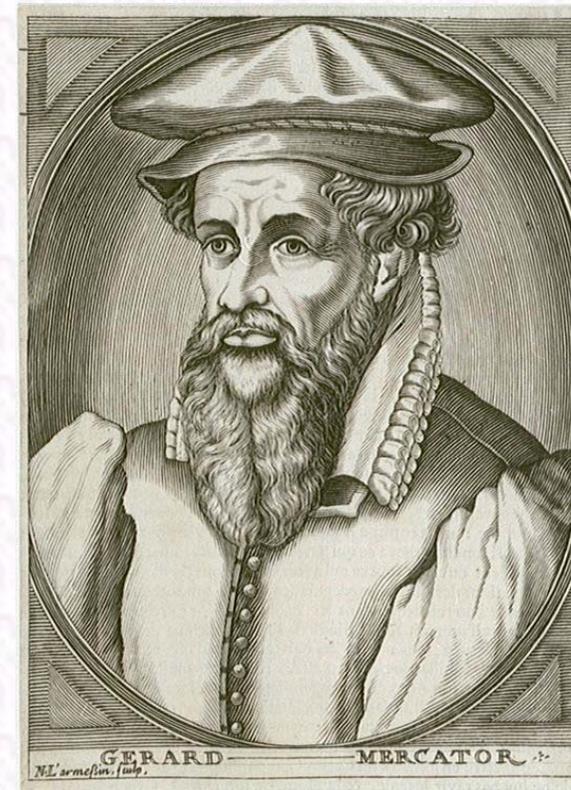


# Projeção de Mercator

---

A grande ideia de Mercator foi encontrar um mapa onde os meridianos e os paralelos continuam perpendiculares e a linhas loxodrômicas são linhas retas.

Para saber qual o azimute  $\alpha$  da loxodrômica que une A e B, dispondo de um tal mapa (carta), basta unir os pontos A e B por uma reta e medir o ângulo  $\alpha$ .

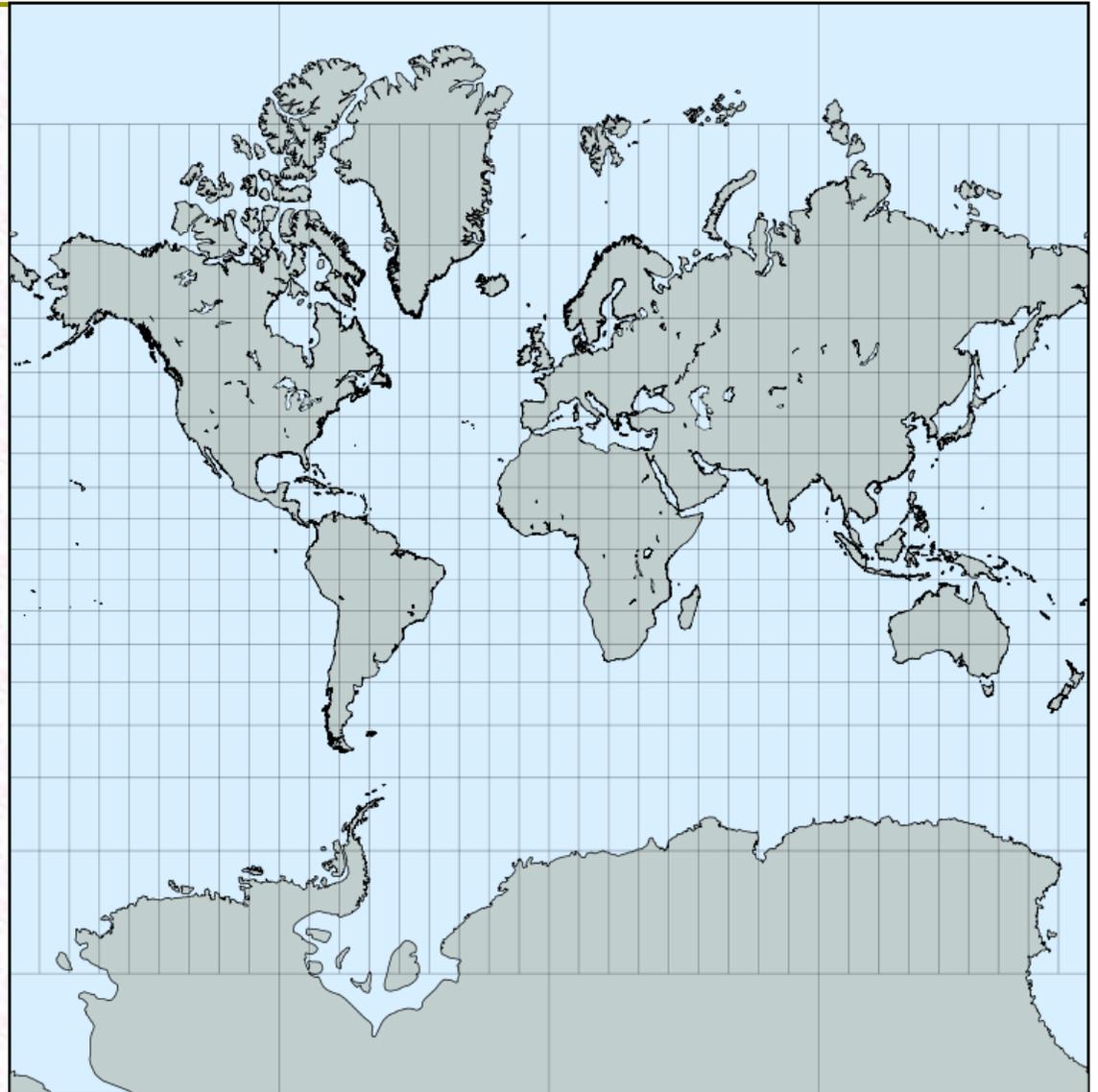


# Projeção de Mercator

*A projeção de Mercator é uma projeção cilíndrica conforme, ou seja, preserva localmente os ângulos. As formas, porém, não são preservadas no mapa.*

*A projeção de Mercator exagera enormemente os tamanhos em latitudes maiores latitudes, incluindo a Europa, America do Norte e a Rússia.*

*Os mapas de Mercator raramente se estendem acima do paralelo  $80^{\circ}\text{N}$  ou abaixo de  $75^{\circ}\text{S}$*



# Projeção de Mercator

---

As seguintes equações determinam as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto no mapa de Mercator a partir de sua latitude  $\varphi$  e de sua longitude  $\lambda$ :

$$x = \lambda$$

$$y = \ln ( \tan(\varphi) + \sec(\varphi) )$$

Isto introduz distorções nas áreas mais afastadas do equador. Por exemplo:

-- A Groelândia parece ter grosseiramente, uma área tão grande quanto a África, quando, de fato, a área da África é aproximadamente 14 vezes aquela da Groelândia.

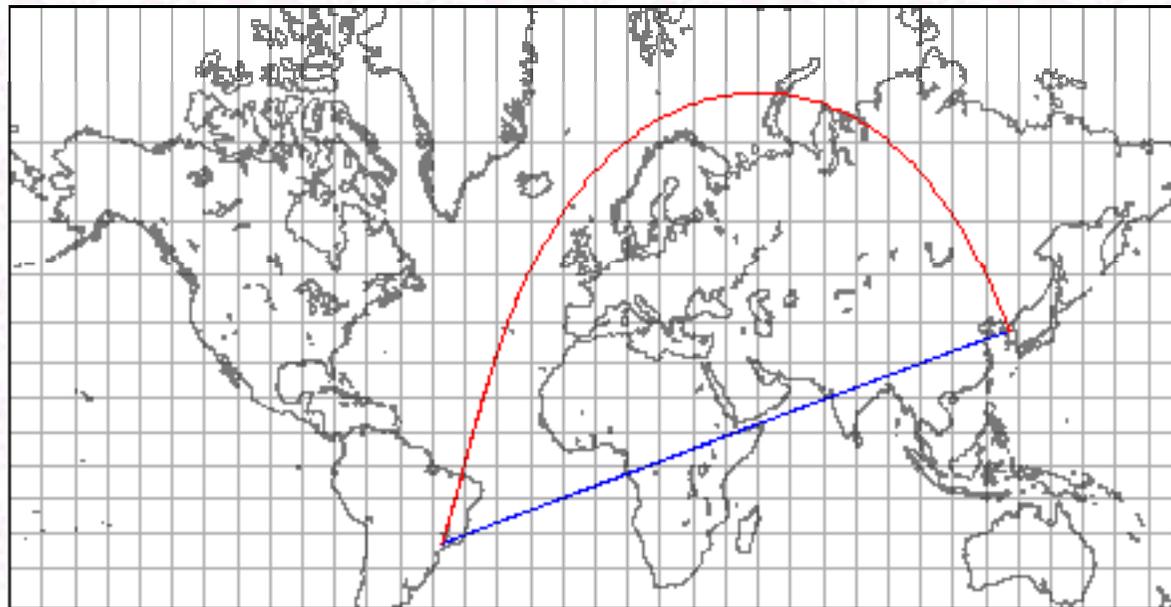
-- O Alasca é apresentado como tendo uma área semelhante ou levemente maior que a do Brasil, quando a área do Brasil é na realidade mais de 5 vezes a área do Alasca.

-Note ainda, que *a Europa está no centro do mapa. (Veja Projeção de Gall-Peters cilíndrica de área igual, 1973)*

# Projeção de Mercator

---

*Por construção, uma linha de rumo constante na esfera, uma loxódroma (loxodromia, a linha azul), corresponde a uma linha reta no mapa. A linha vermelha é o grande círculo correspondente.*



# O Vôo do Falcão Peregrino

---



VANCE A. TUCKER, *The Journal of Experimental Biology* 203, 3733–3744, 3745–3754 e 3755–3763, (2000)



# O Vôo do Falcão Peregrino

---



O falcão Peregrino usa duas habilidades de alta performance – velocidade de vôo e agudeza da percepção visual – para atacar sua vítima. Ele fica voando a grande altura e quando localiza uma presa, arremete-se sobre ela a uma grande velocidade. A força de arrasto, particularmente em velocidades que excedem 50 metros por segundo, é minimizada mantendo a cabeça alinhada ao corpo.

Mas isto apresenta um problema: enxergar uma presa do tamanho de um bentevi de uma distância de 1 km só é possível usando a fóvea profunda, que, como veremos, está orientada a um ângulo de cerca de 40 graus do eixo da cabeça. Assim, seria impossível para um falcão ver sua presa enquanto voasse em linha reta sobre ela, e mantendo a cabeça em ângulo enquanto voasse, aumentaria o arrasto significativamente e reduziria a velocidade.

# O Vôo do Falcão Peregrino

---

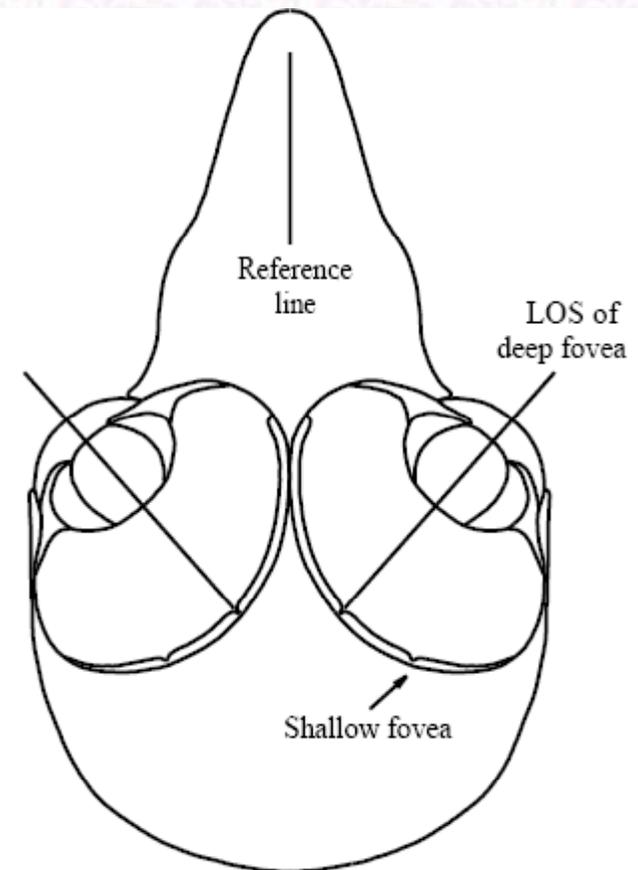


Em três trabalhos, *J. Exp. Biol.* **203**, 3733; 3745; 3755 (2000), Vance A. Tucker e seus colegas modelaram os aspectos quantitativos do arrasto aerodinâmico, estimaram a melhor integração de velocidade e visão e apresentam observações de campo do vôo do falcão.

# O Vôo do Falcão Peregrino



Aves de rapina, como falcões e águias, possuem duas regiões da retina em cada olho que são especializadas na visão de alta resolução: a fóvea profunda e a fóvea rasa. A linha de visão da fóvea profunda aponta para frente e aproximadamente  $45^\circ$  para a direita ou esquerda do eixo da cabeça, enquanto a da fóvea rasa também aponta para frente, porém aproximadamente  $15^\circ$  para a direita ou esquerda. A anatomia das fóveas sugere que a fóvea profunda tem a maior acuidade visual. As aves de rapina consideradas movem repetidamente suas cabeças entre três posições enquanto olham para um objeto: direta, com o eixo da cabeça apontando em direção ao objeto; ou para os lados, esquerda ou direita, com o eixo da cabeça apontando aproximadamente  $40^\circ$  para o lado do objeto. Desde que aves de rapina não giram seus olhos perceptivelmente nas caixas oculares, estes movimentos presumivelmente fazem com que a imagem caia na fóvea rasa e fóvea profunda. Os movimentos ocorrem aproximadamente a cada 2 s em média para falcões, e aproximadamente cada 5 s nas águias carecas.



# O Vôo do Falcão Peregrino



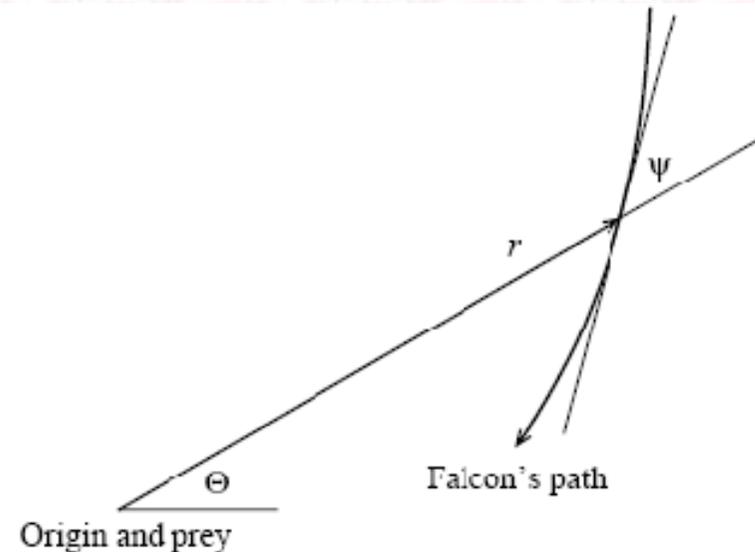
Tanto  $r$  quanto  $\Theta$  variam quando o falcão se aproxima da presa, porém, o ângulo entre a direção do vetor posição e a tangente à curva em qualquer ponto,  $\Psi$ , permanece constante. Temos que

$$\tan \Psi = r \frac{d\Theta}{dr}$$

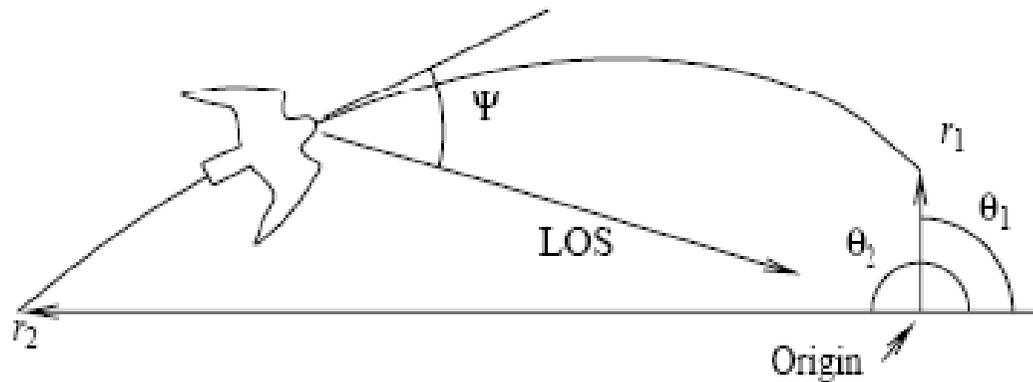
Integrando essa equação, obtemos a equação da trajetória do falcão

$$r = e^{(\Theta - \pi) \cot \Psi}$$

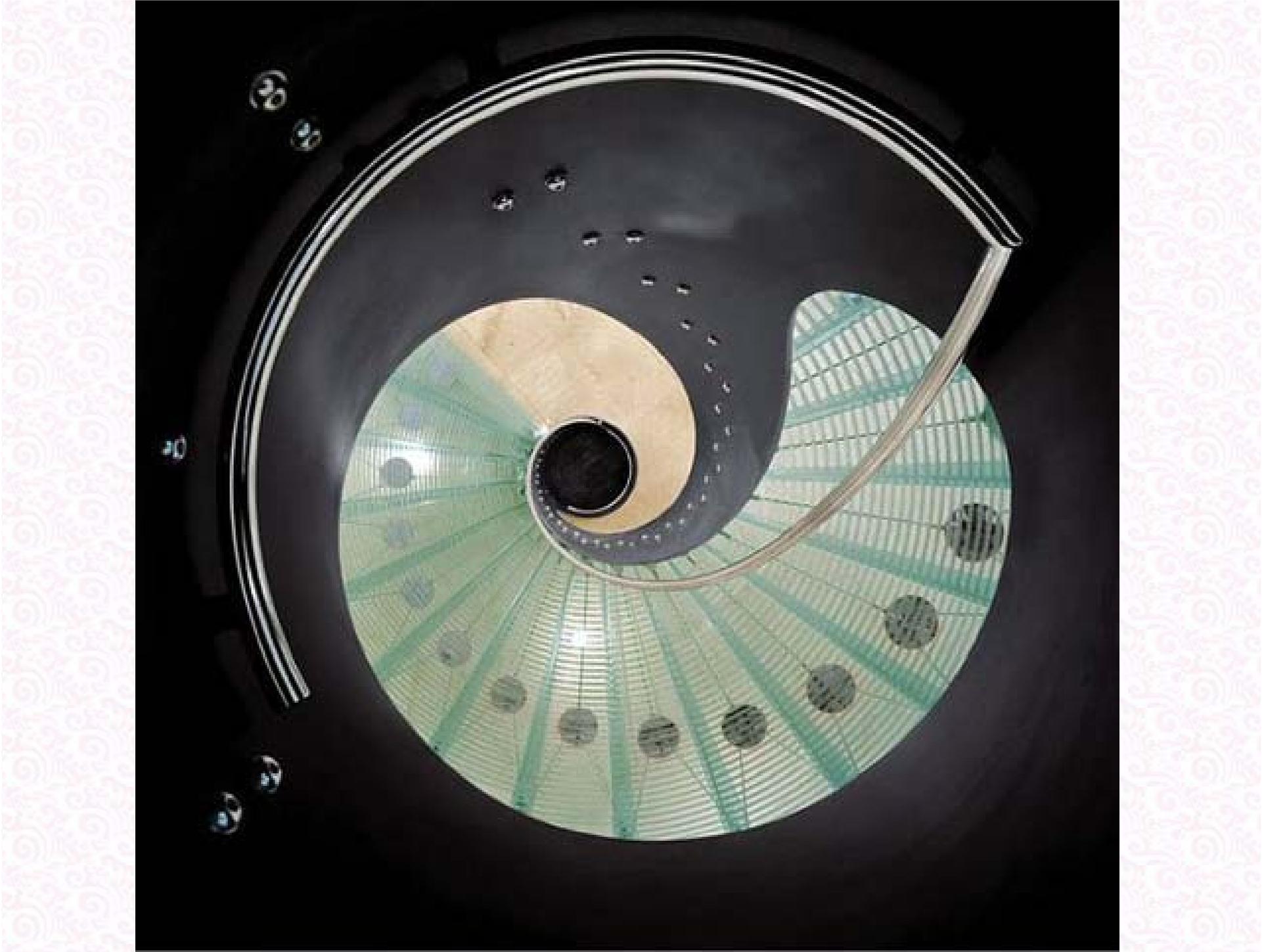
que é a equação de uma **espiral logarítmica**.



# O Vôo do Falcão Peregrino



A solução para o falcão é voar ao longo de uma espiral logarítmica, com cabeça e corpo alinhados ao longo da linha de vôo a um ângulo de 40 graus com a linha de visão da presa, até que quase 90 % da distância tenha sido coberta. Nesse ponto, a acuidade binocular é suficiente para guiar um ataque em linha reta. Vários verões de observação com equipamento de rastreamento computadorizado confirmaram que falcões peregrinos de fato voam ao longo de trajetórias espirais.





# Escadas do Hotel Josef de Praga

---



# Escadas do Hotel Josef de Praga

*Eva Jiricna é uma famosa arquiteta tcheca. Recebeu “The American Institute of Architects- AIA-Design Excellence Award” pelo Hotel Josef*



# Espirais representando a água

---



# Espirais representando a água

---

A água é encontrada no fim de um caminho.



# Espirais na Religião

---



Esta espiral Celta representa as três fases da Deusa Tripla (Donzela, Mãe e Anciã). A trindade aparece nas culturas antigas: celta, grega, romana, nórdica. Esta figura é também chamada triskele.



# Espirais na Religião



A Deusa Tripla podia mudar sua forma constantemente aparecendo tanto como uma, como se dividindo em três aspectos diferentes também.

Cada povo interpretava a Deusa de uma forma, com nomes e aspectos diferentes, mas da mesma divindade.



# Espirais na Arte e na Religião

---



Runestone de Smiss  
at När (Gotland,  
Suécia), 400-600  
d.C. Fotografia de  
Raymond  
Héjdström. Museu  
Histórico de Visby  
(*Länsmuseet på  
Gotland*)



# Espirais na Arte e na Religião



Runestone de Austers-  
Hangvar (Gotland, Suécia),  
400-600 d.C. Fotografia de  
Raymond Héjdström. Museu  
Histórico de Visby  
(*Länsmuseet på Gotland:*



Foto Raymond Hejdström

# As nuvens da sorte

---

O pergaminho chinês serviu de modelo para a tocha olímpica. Ele simboliza o papel, uma das maiores contribuições da China para a humanidade e maneira pela qual a cultura chinesa se manteve viva.



# As nuvens da sorte

---

Na tocha olímpica foram utilizados, além da cor vermelha, que representa a cultura tradicional chinesa, espirais representando nuvens, inspiradas na mitologia que conta que os deuses se locomovem voando em “xiangyun”, ou nuvens da sorte. Para os chineses, as nuvens trazem bênçãos e harmonia.



# Espirais e os Maori

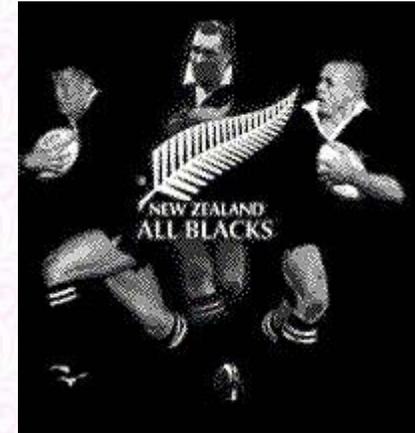
---

Segundo alguns historiados e antropólogos, a Nova Zelândia foi formada por nativos originários do leste da Polinésia, entre 800 e 1300 a.C., em vagas sucessivas e continuadas. Segundo a narrativa Maori, os antepassados chegaram de Hawaiki -- um lugar lendário nas florestas tropicais da Polinésia -- em "**wakas**", grandes canoas, que cruzaram os oceanos.



# Espirais e os Maori

A Haka é uma dança guerreira típica do povo Maori, usada tanto para dar boas vindas a visitantes quanto para intimidação de tribos inimigas. Atualmente, a Haka "**Ka Mate**" é conhecida mundialmente pela performance de intimidação no início dos jogos de Rugby da seleção da Nova Zelândia (All Blacks).



# Espirais e os Maori

---

*A tatuagem é um dos elementos mais representativos dos Maori, em especial a tatuagem facial designada de «Moko».*

*Os Māori aplicam a mesma técnica na talha de madeira e na tatuagem.*

*A moko é um símbolo de prestígio social, pelo que quanto mais densa for a pintura mais importância social tem o indivíduo*

**Ao lado um desenho de moko por H. G. Robley**



# Espirais e os Maori



# Espirais e os Maori

---



# Espirais e os Maori

---



# Espirais e os Maori



# Espirais e os Maori



Sydney Parkinson (c. 1745-1771)

*"Most of the Maori men had their hair tied up on the crown of their heads in a knot. Their faces were totaowed, or marked either all over, or on one side, in a very curious manner, some of them, in fine spiral directions, like a volute being indented in the skin very different from the rest."*

October 12, 1769

# Espirais e os Maori

---

Um desenho da cabeça mumificada tatuada de um guerreiro Maori no Museu de História Natural em Rouen na Normandia, França (NYT2007).

No século XIX as cabeças dos Maori tornaram-se alvo de cobiça e interesse por parte dos colecionadores europeus, uma vez que a decapitação era um hábito de guerra, bem como a colocação das mesmas em urnas sagradas por parte dos vencedores. O Museu Americano de História Natural tem mais de 30 cabeças, segundo o NYT.



# Espirais e os Maori

---

O comércio das cabeças tatuadas foi desenvolvido pela interação com os navegadores europeus, que maravilhados com o pormenor artístico do trabalho, começaram a trocar cabeças por armas de fogo, munições e artifícios em metal. A procura começou a ser superior à oferta, em resultado disso a população Maori começou a ser consideravelmente reduzida, dizimada.



Segundo consta, a primeira cabeça a ser levada para a Europa foi pelo naturalista Joseph Banks, mais tarde Sir Joseph Banks, que chegou à Nova Zelândia a 20 de Janeiro de 1770, juntamente com a tripulação do Capitão Cook. Era a cabeça de um jovem de catorze ou quinze anos que pereceu em combate..

# Espirais e os Maori

Muito do que conhecemos hoje dos Maori, vem dos estudos e documentações feitas pelo Major-General Horatio Gordon Robley. Enquanto na Nova Zelândia, Robley fez amizade com os Maori e usou suas habilidades artísticas para ilustrar e pintar cenas do modo de vida Maori. Atualmente, o Dominion Museum em Wellington abriga setenta de suas pinturas e esboços.

**Ao lado um desenho de moko por H. G. Robley**



Descriptive drawing by H. G. Robley of a moko or tattoo designs on face

# Espirais e os Maori

---

*Major-General Horatio Gordon Robley*

*Os Maori mumificavam as cabeças tatuadas dos seus companheiros de tribo e Robley decidiu adquirir tantas quanto fosse possível. Ao longo dos anos, ele construiu uma coleção de 35. Em 1908 ele ofereceu as cabeças ao Governo da Nova Zelândia por £1,000 mas sua oferta não foi aceita. Hoje, 30 de suas cabeças estão na coleção do Museu de História Natural de Nova York.*



# Espirais e os Maori

Algumas  
gravuras de  
H.G.Robley



Koru



# Espirais e os Maori

---

A Nova Zelândia tem cerca de 146 espécies de ferns. **Ferns** são árvores e plantas cujas folhas se parecem com as das Samambaias. Existem florestas e mais florestas delas por toda a Nova Zelândia. A maioria pertence ao grupo das Cyathea, sendo a mais famosa a *Cyathea Dealbata*, também conhecida por *Silver Fern* ou *Ponga*. As folhas refletem um cinza prateado, daí o nome. A Silver Fern é um dos símbolos da Nova Zelândia, inclusive aparecendo na camisa oficial dos All Blacks. Outra espécie de "Fern" bastante encontrada, é do grupo das *Dicksonias*, sendo que ambas datam da época dos dinossauros



# Espirais e os Maori

---





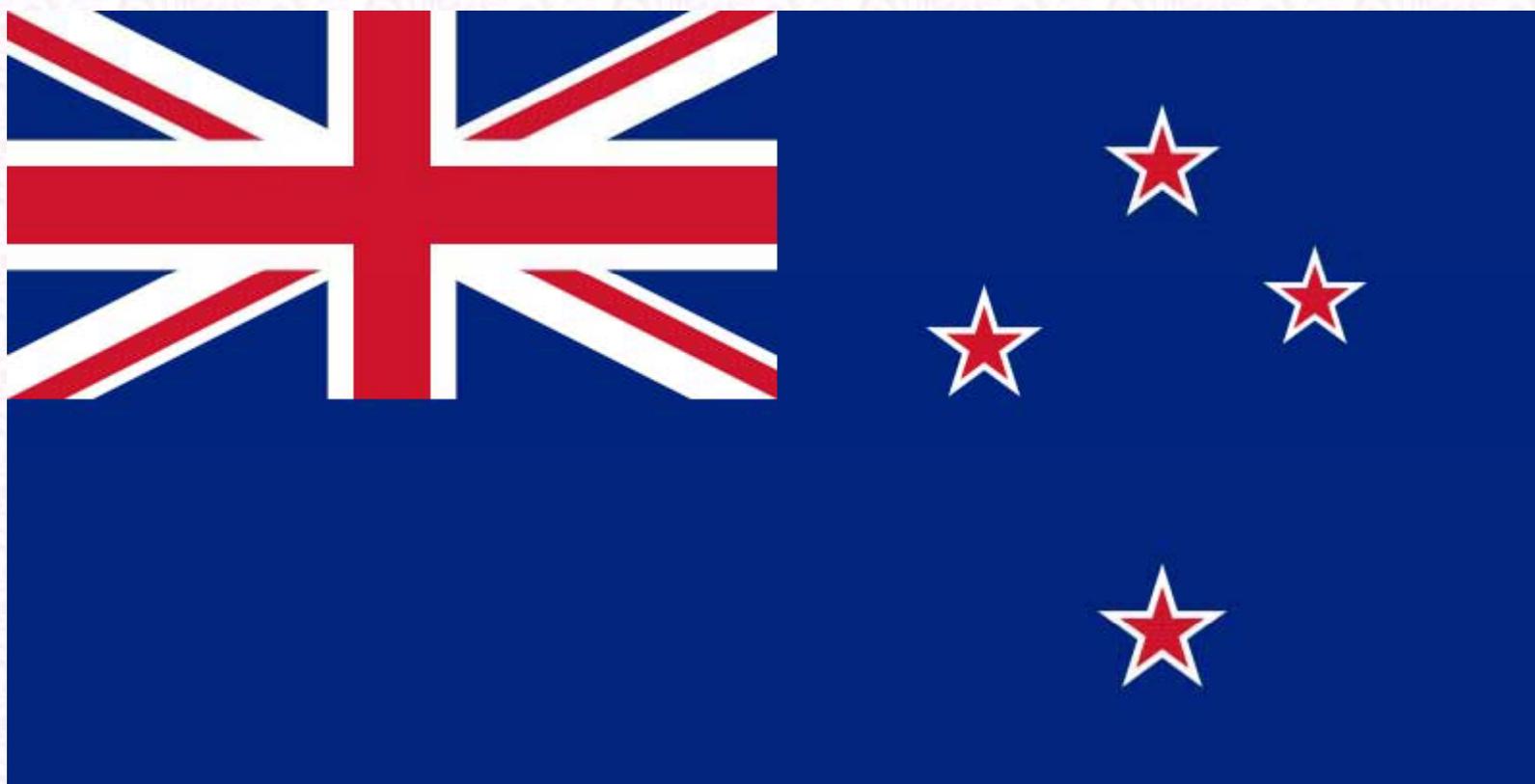
# Espirais e os Maori

---



# Bandeira da Nova Zelândia

---



# Espirais e os Maori

*A **Bandeira Koru** foi proposta como uma segunda bandeira para a Nova Zelândia. Ela foi desenhada por Friedensreich Hundertwasser em 1983.*



*Como o preto é uma cor tradicional dos Maori, a bandeira tem uma haste preta à esquerda. Tem uma espiral verde semelhante ao koru. A espiral branca é uma alusão a Aotearoa, um nome Māori para a Nova Zelândia significando Terra da Longa Nuvem Branca. Hundertwasser também via o design como representando a humanidade em harmonia com a natureza.*

# O pír espiral



# O píer espiral

---

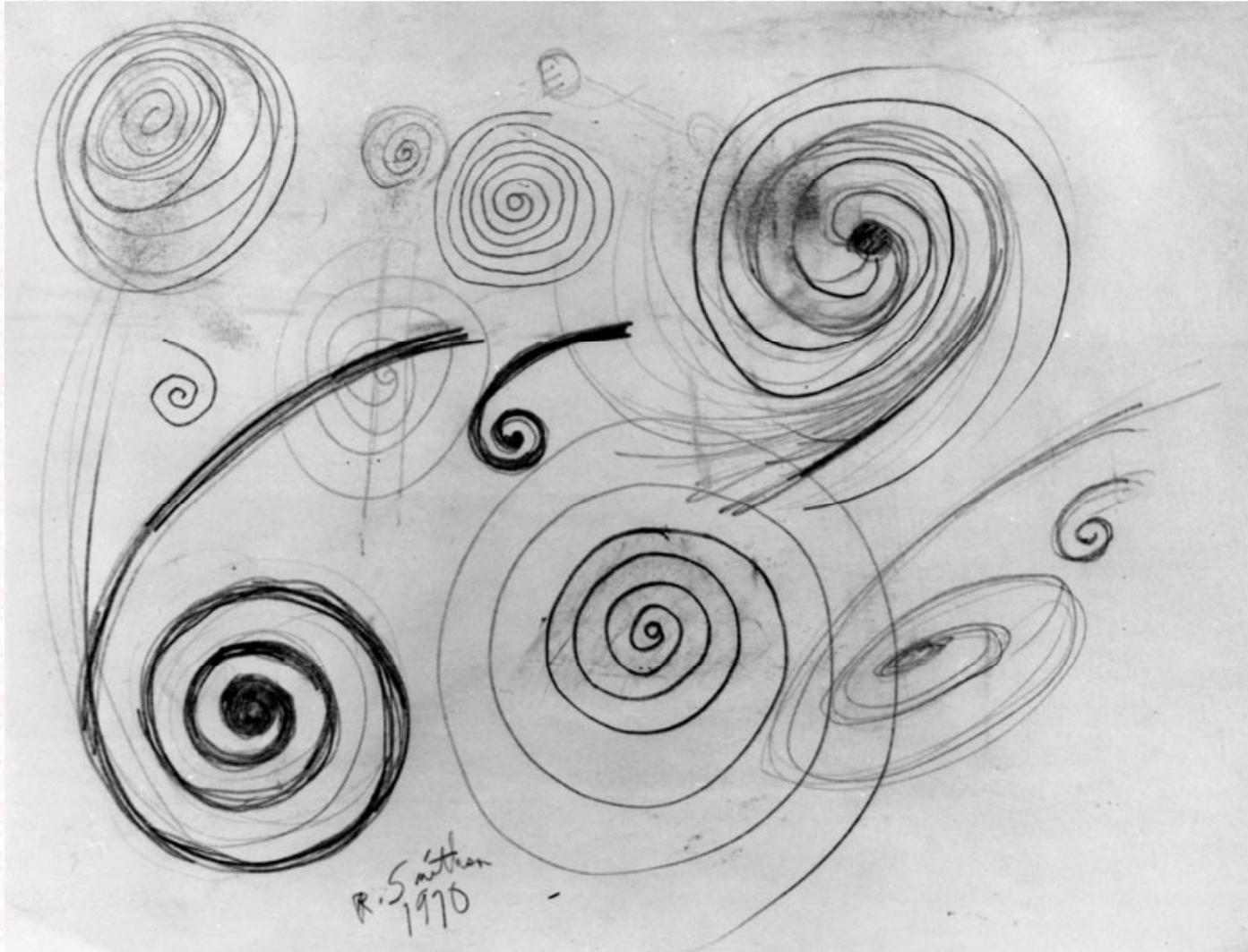
O “*Spiral Jetty*” (*pier espiral*), considerado o trabalho central do escultor americano Robert Smithson (1938-1973), é uma “*earthwork sculpture*” (um trabalho de arte consistindo de uma porção de terra modificada por um artista). Está na margem nordeste do Grande Lago Salgado, em Utah. Foi construído em 1970 numa época de seca. Foram usadas 6.650 toneladas de rocha basáltica e terra dos arredores, transportadas em seis dias pelo artista e mais dois assistentes com a utilização de dois caminhões e dois tratores. Como resultado tem-se um píer com 4,5 metros de largura e 460 metros de comprimento que das margens, avança sobre o lago e se converte numa espiral.

# O pír espiral



# Spirals R. Smithson n.d. circa 1970 graphite on paper 9" x 12"

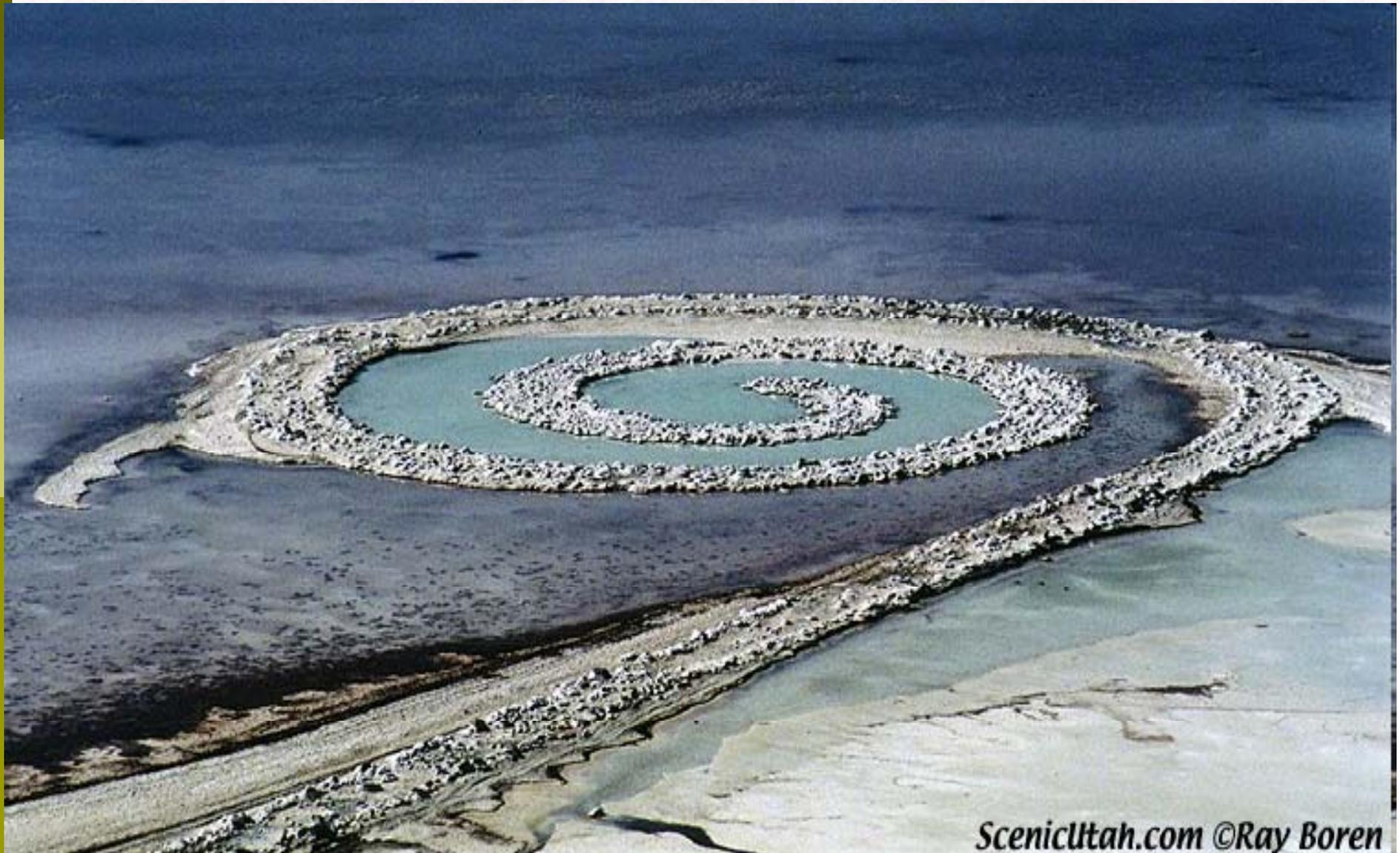
---



# O píer espiral



# O píer espiral



# O píer espiral

---

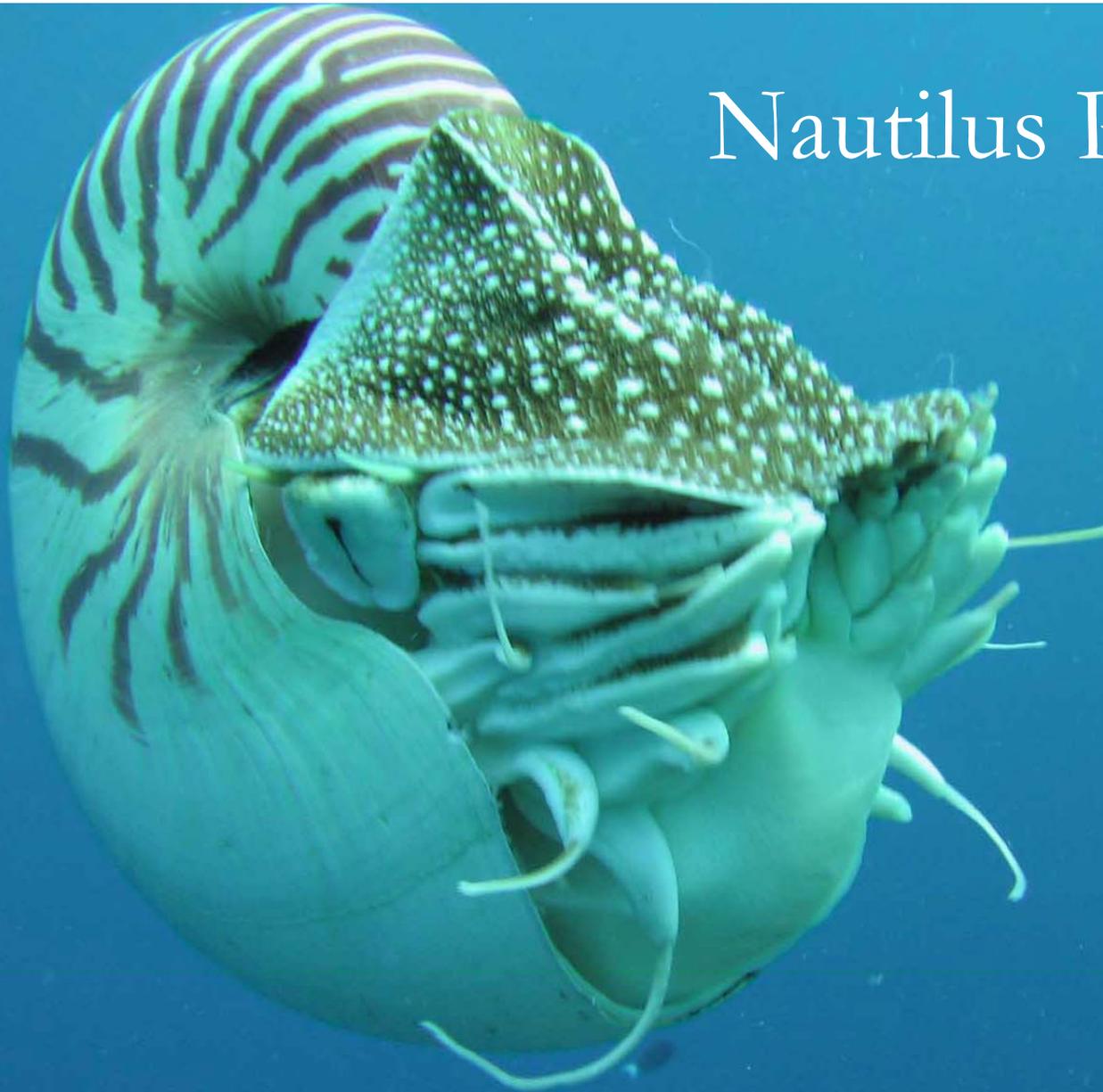


ROBERT SMITHSON / JAMES COHAN GALLERY

---

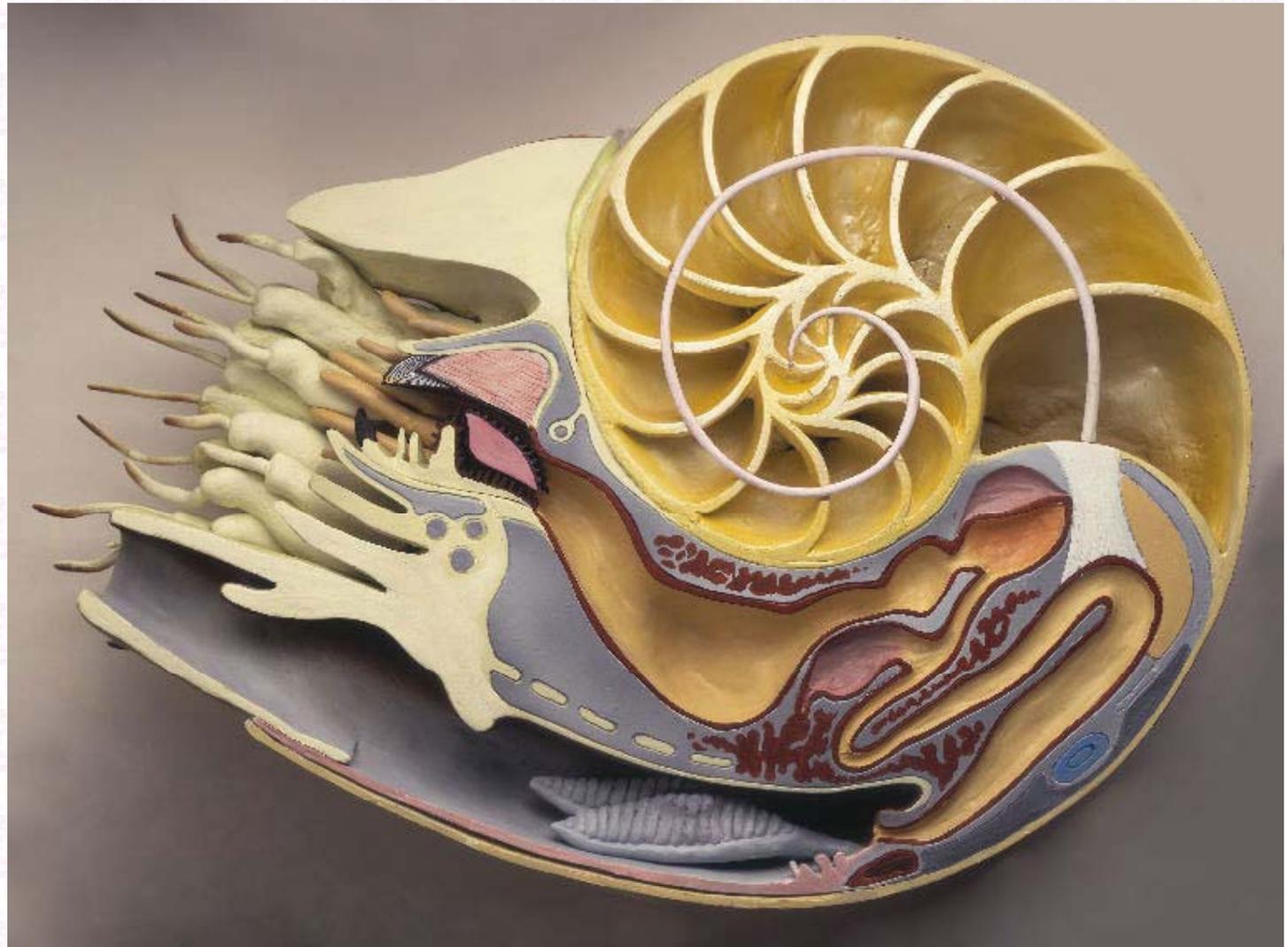
FIM

# Nautilus Pompilius



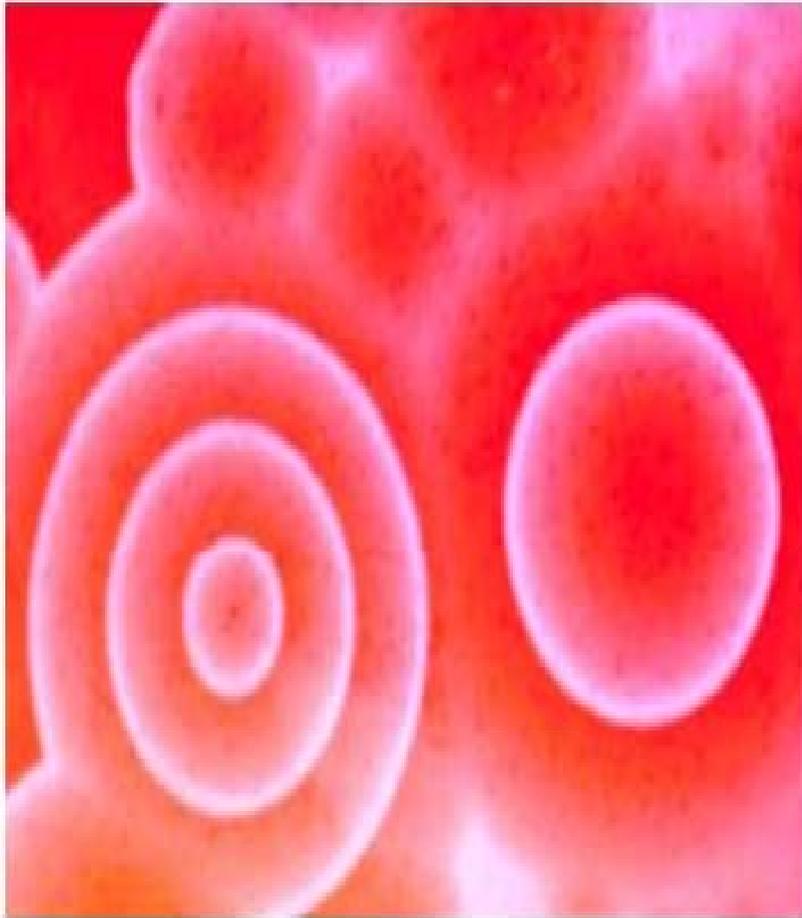
# Nautilus Pompilius

As the animal grows, it adds a chamber to its shell and most of the body occupies this newest chamber. A long extension from the body called a siphuncle extends back through the shell and is used in bouyancy control. The visible part of the animal is a triangular leathery hood that can cover the entrance to the shell. Beneath this protrudes about 90 tentacles and beneath those is the siphon.



# ondes propagatives dans une solution de la réaction Belousov-Zhabotinsky

---



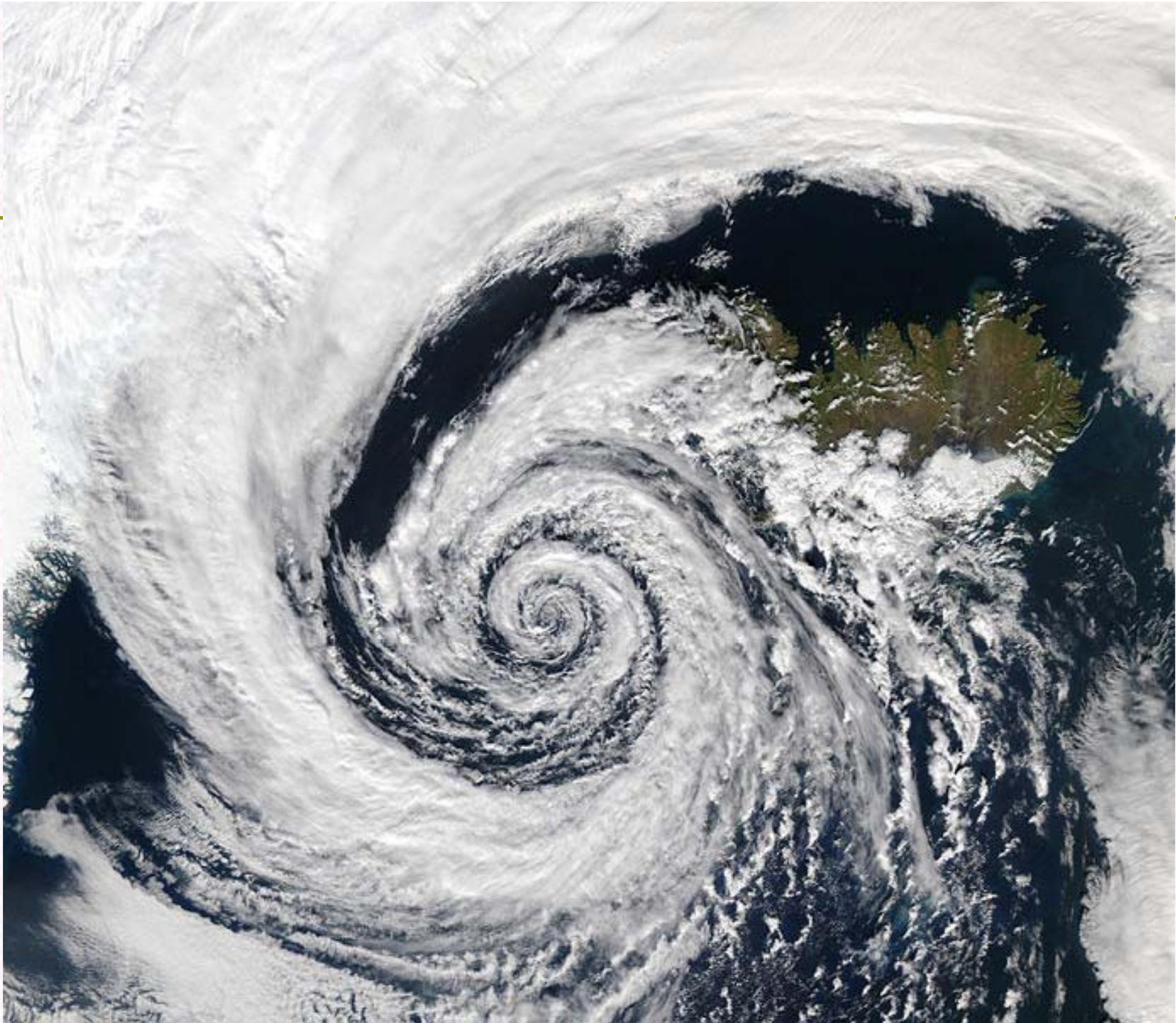
Spiral Galaxy M101

Hubble Space Telescope ■ ACS/WFC



NASA and ESA

STScI-PRC06-10a

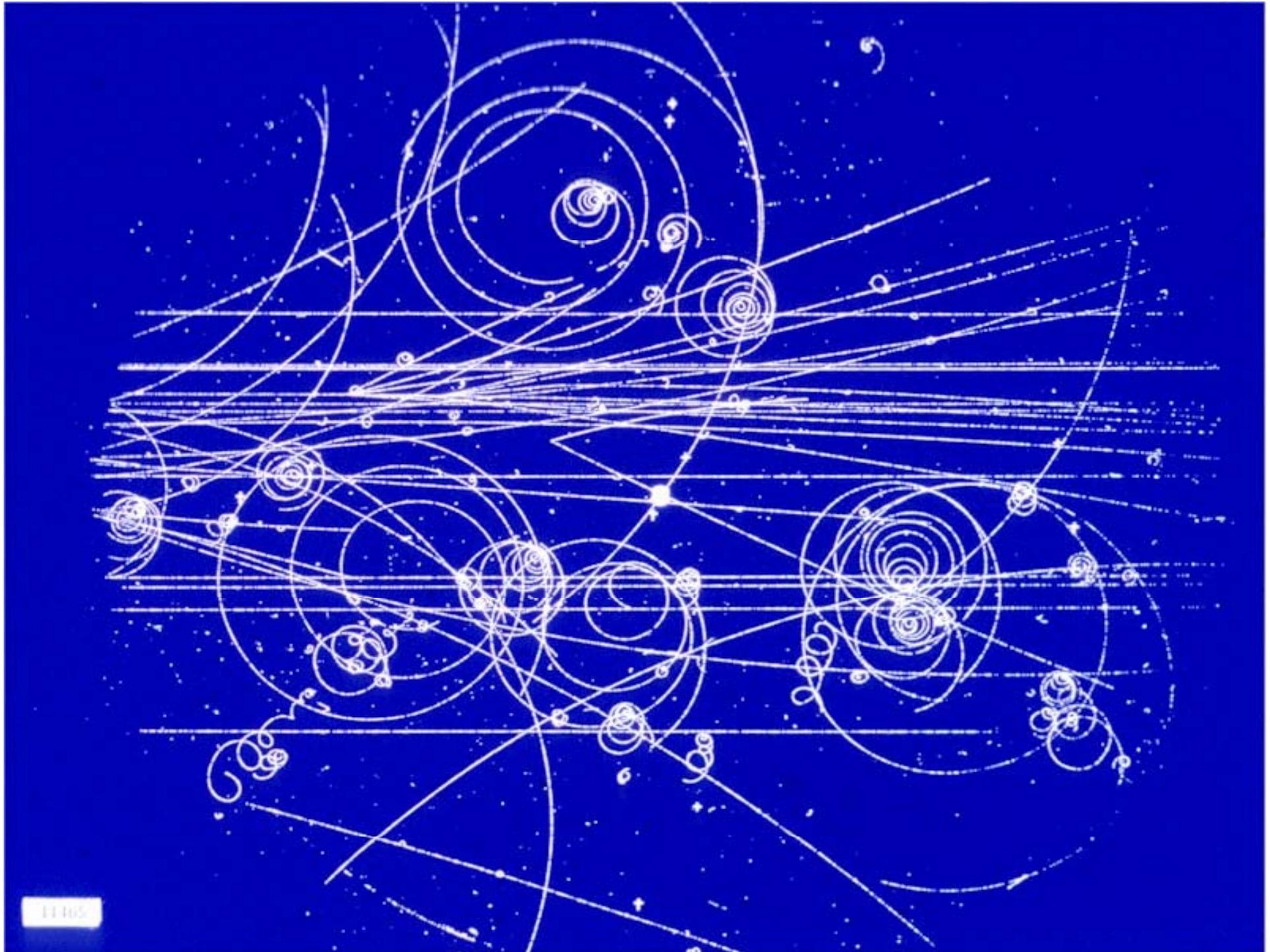












11105



RIGHT STEVE MORRIS

**AIRLINERS.N**



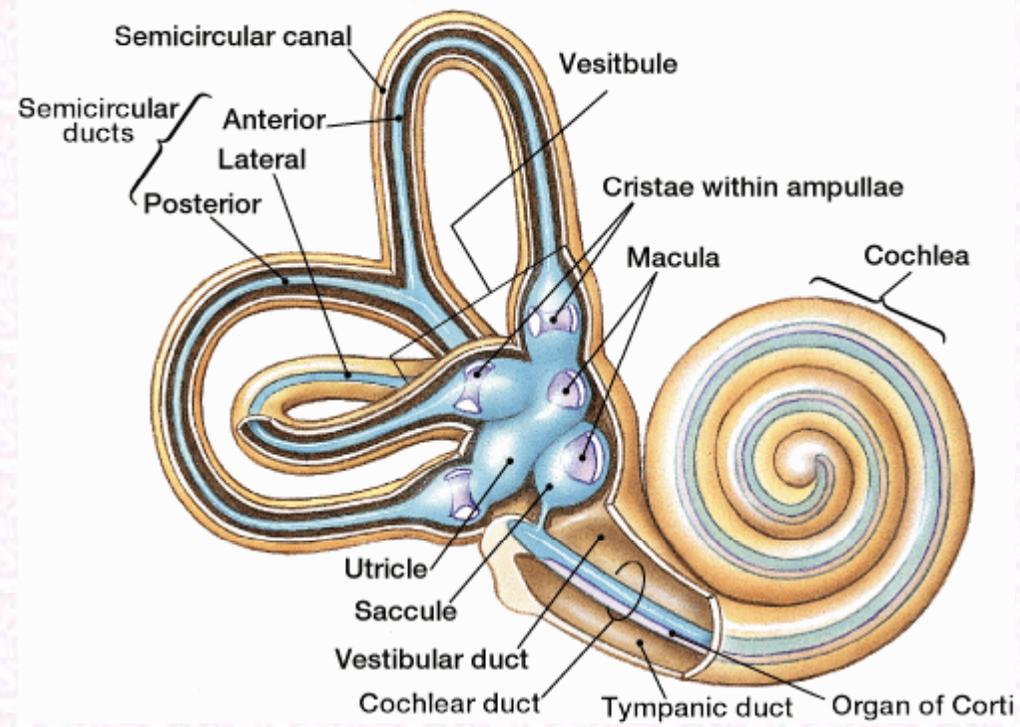


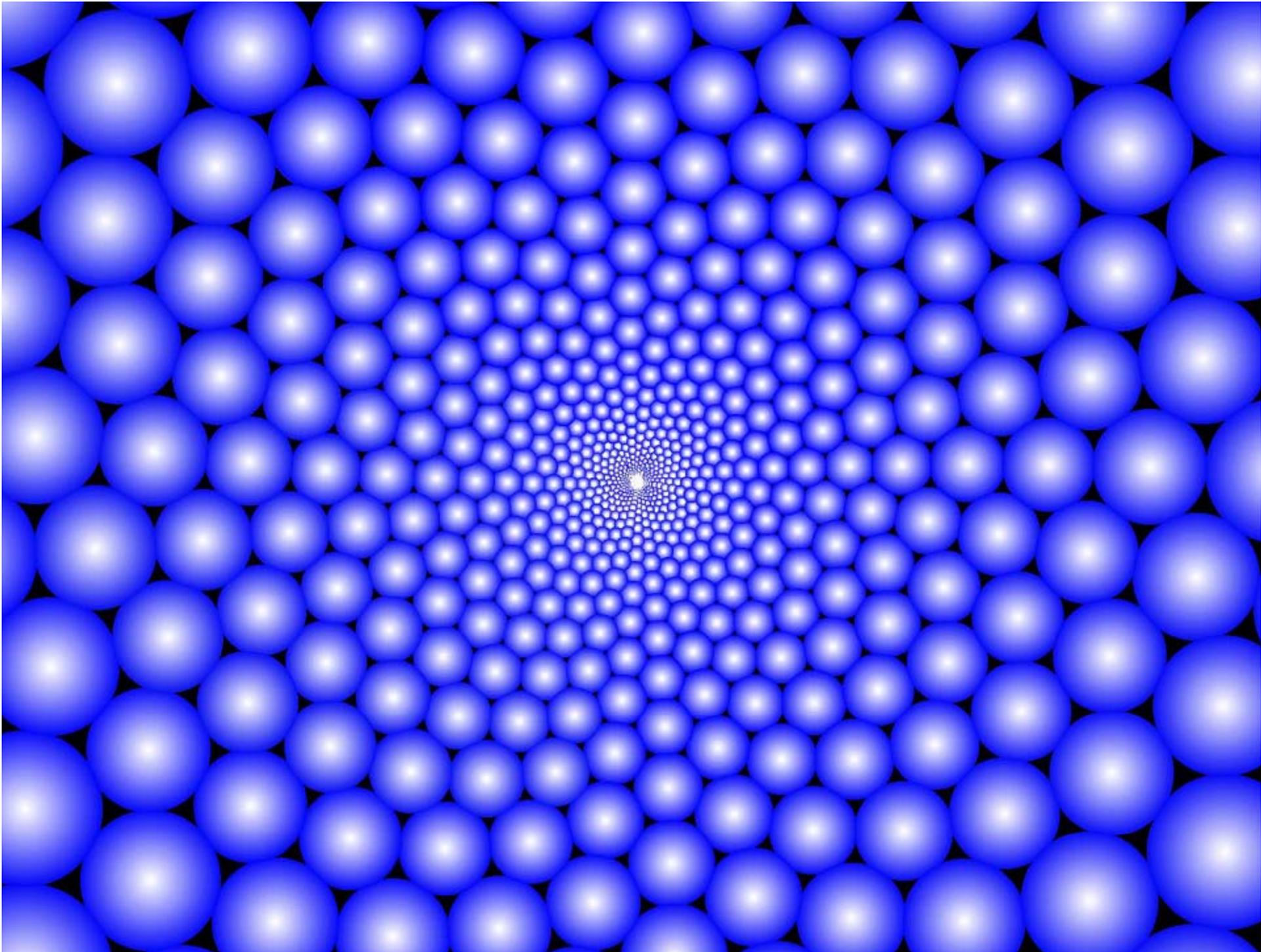


COPYRIGHT STEVE MORRIS

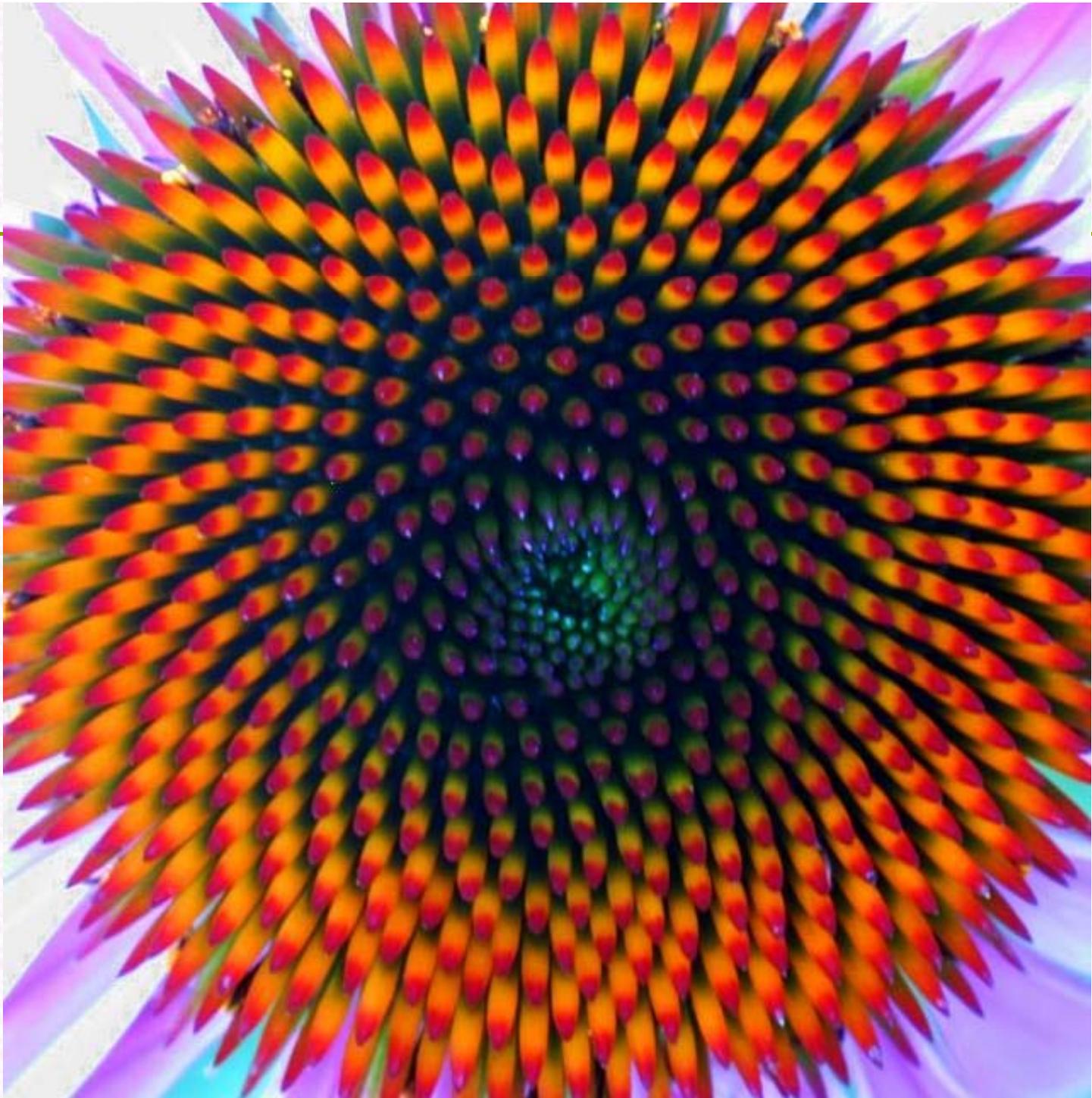
AIRLINERS.NET

Wake turbulence was captured in this photo of a British Airways flight descending through thin clouds near London, July 2007.

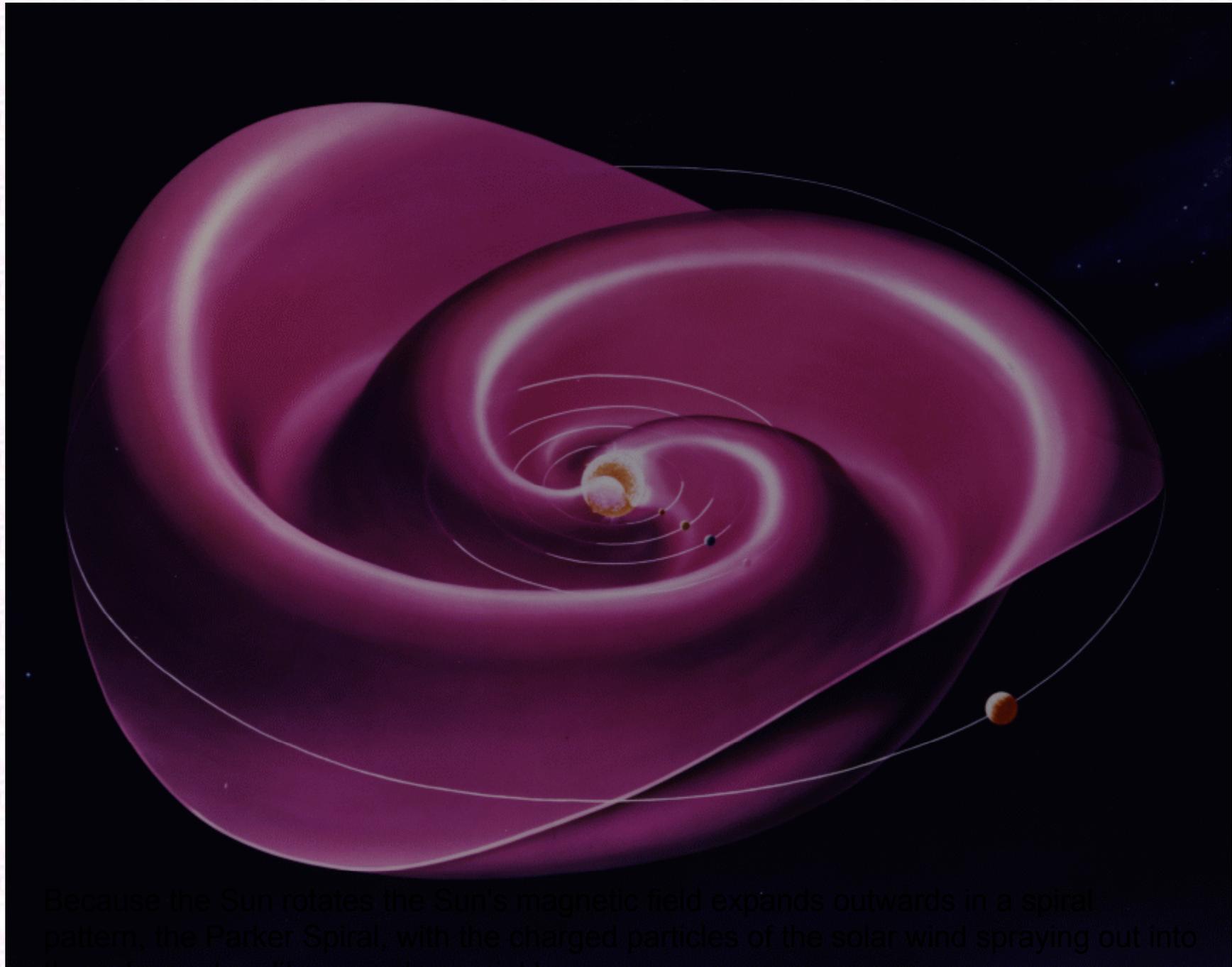












Because the Sun rotates the Sun's magnetic field expands outwards in a spiral pattern, the Parker Spiral, with the charged particles of the solar wind spraying out into the solar system like a garden sprinkler.









# Espirais na Arte e na Religião

---



Newgrange  
entrance  
stone with  
megalithic  
art. Boyne  
Valley,  
Ireland



Newgrange foi originalmente construído c. 3300 e 2900 AC. É uma tumba de passagem.