Tópicos de Física Clássica I – Aula 6
Cálculo variacional com condições auxiliares

a c tort

Cálculo variacional com condições auxiliares

Em muitos problemas da física-matemática condições auxiliares são impostas e a função que extremiza o funcional de interesse deve satisfazer estas condições. Eis um problema famoso:

> *Fugindo de seu irmão Pigmalião que havia assasinado seu tio e marido, Dido de Tiro, mais tarde fundadora e rainha de Cartago, chega às costas do norte da África por volta de 825 a. C. acompanhada de um séquito de servos e trazendo seus recursos econômicos. Negociando com o chefe berber do lugar, Dido obtém direito a uma porção de terra junto à linha costeira. Um porção tão grande quanto a pele curtida de um boi pudesse cobrir! Mas Dido era mais sagaz do que o chefe berber e fez com que o couro fosse cortado em tiras bem finas e que estas fossem presas umas às outras pelas extremidades com isso formando uma faixa de couro estreita e muito longa que ela utilizou para demarcar as terras obtidas no acordo. O problema é então:* ***dados dois pontos fixos sobre a linha da costa, qual a forma da curva de comprimento finito ℓ cujas as extremidades estão afixadas a esses pontos que abrange a maior porção de terra possível?***

Em outros dizeres: devemos encontrar uma curva fechada que maximiza uma área com a condição auxiliar de que o comprimento da curva seja finito e constante. Este é o protótipo do problema isoperimétrico. Este tipo de problema pode ser resolvido com a técnica dos **multiplicadores de Lagrange**, vejamos como ela funciona.

(Opcional) Os multiplicadores de Lagrange: introdução

Considere uma função real f das três variáveis reais x, y e z bem definida sobre um domínio D. Então,

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz. \tag{1}$$

Suponha que em dado ponto $P \in D$, tenhamos $df = 0$. Neste caso, se x, y e z são independentes, isto significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Mas, suponha agora que haja uma relação entre x, y e z que possa ser escrita na forma

$$g(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Neste caso

$$dg = \frac{\partial g}{\partial z}\, dx + \frac{\partial g}{\partial g}\, dy + \frac{\partial g}{\partial z}\, dz = 0. \tag{4}$$

Desta vez não podemos fazer uso independência das variáveis x, y e z. Considere então a nova função $f + \lambda\, g$, onde λ é um parâmetro – **o multiplicador de Lagrange** – a ser determinado. Neste caso,

$$df + \lambda\, dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\, \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\, \frac{\partial g}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\, \frac{\partial g}{\partial z} \right) dz = 0. \tag{5}$$

A condição auxiliar permite escrever, digamos, z como função de x e y eliminando assim essa variável das derivadas parciais e escolhendo λ tal que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = 0. \tag{6}$$

eliminamos dz já que $z = z(x, y)$ e logo dz é uma combinação linear de dx e dy, isto é: não é mais independente. Por outro lado, como x e y são variáveis independentes:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\, \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0. \tag{8}$$

Com essas três equações – (6), (7), (8) – mais a condição auxiliar – (3) – podemos determinar x, y, z e λ. Vejamos um exemplo com duas variáveis.

Exemplo 1 Determinar a razão entre o raio R e a altura H que extremiza a superfície total de um cilindro reto circular mantendo o volume V constante.

<u>Solução.</u> A área total é

$$A(R, H) = 2\pi RH + 2\pi R^2;$$

e o volume

$$V = \pi R^2 H = \text{constante}, \qquad \text{ou} \qquad \bar{V} = \pi R^2 H - \mathrm{C} = 0.$$

Fazendo as correpondências $x \to R$, $y \to H$, $A(R,H) \to f(x,y)$ e $\bar{V}(R,H) \to g$, temos

$$\frac{\partial A}{R} + \lambda \frac{\partial V}{\partial R} = 0;$$

$$\frac{\partial A}{H} + \lambda \frac{\partial V}{\partial H} = 0;$$

Segue que

$$2\pi H + 4\pi R + \lambda\, 2\pi R H = 0;$$
$$2\pi R + \lambda\, \pi R^2 = 0.$$

Segue que

$$\lambda = -\frac{2}{R},$$

e

$$\frac{R}{H} = \frac{1}{2}.$$

■

Exercício 1 O estado fundamental de uma partícula confinada a um cilindro reto circular de raio R e altura H é dado por

$$E = \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{(2.4048)^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right).$$

Determine a razão R/H que minimiza a energia da partícula para um volume V fixo. ■

Os multiplicadores de Lagrange no cálculo variacional

Considere uma vez mais o funcional

$$J = J[y,z] = \int_{x_a}^{x_b} F[y, y'; x]\, dx,$$

Uma variação δJ do funcional J é dada por

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx.$$

A equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Mas se houver uma condição auxiliar esta equação deve ser modifcada.

Condição auxiliar na forma integral

Considere o funcional de uma única função $y(x)$:

$$J = J[y] = \int_{x_a}^{x_b} F[y, y\,'; x]\, dx, \;\; y(x_a) = y_a, \;\; y(x_b) = y_b. \tag{9}$$

Suponha agora uma condição auxiliar na forma de um segundo funcional

Observe que G envolve a primeira derivada de $y(x)$.

$$K = K[y] = \int_{x_a}^{x_b} G[y, y\,', x]\, dx = \text{constante}; \;\; y(x_a) = y_a, \;\; y(x_b) = y_b. \tag{10}$$

Neste caso podemos construir $\bar{J} = J + \lambda\, K$, onde λ é uma **constante**, e escrever:

$$\delta \bar{J} = \delta \int_{x_a}^{x_b} (F + \lambda\, G)\, dx. \tag{11}$$

Definindo: $\bar{F} = F + \lambda\, G$, obtemos as equações de Euler-Lagrange para $\bar{F}$:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \bar{F}}{\partial y\,'} = 0. \tag{12}$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y\,'} + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y\,'} \right) = 0; \tag{13}$$

Portanto, a curva $y(x)$ que extremiza o funcional $\bar{J}[y]$ deve satisfazer a equação (12) ou sua equivalente (13). Naturalmente, ela deve satisfazer as condições do problema: $y(x_a) = y_a$, $y(x_b) = y_b$ e $K[y] =$ constante.

Exemplo 2 *A catenária*

Considere um cabo de densidade de massa uniforme ρ e seção reta A, comprimento fixo L preso nas extremidades nos pontos fixos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. A energia potencial de um elemento da massa dm ($dmgh$) se escreve:

$$dU = \rho A\, ds\, g\, y = \mu\, g\, y ds,$$

onde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ é um elemento do comprimento da corda e $\mu = \rho\, A$ é a densidade linear de massa do cabo. A energia potencial total é dada pelo funcional

$$U = J[y] = \mu g \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} y\, ds = \mu g \int_{x_a}^{x_b} y \sqrt{1 + y\,'^2}\, dx.$$

A condição auxiliar é dada por

$$L = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y\,'^2}\, dx = \text{constante}.$$

Definindo $\bar{U} = U + \lambda\, L$, ou

$$\bar{U} = \int_{x_a}^{x_b} \left(\mu g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

Portanto,

$$\bar{F}[y, y'; x] = \mu g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$

Como $\bar{F}$ não depende explicitamente de x podemos fazer uso da identidade de Beltrami:

$$\bar{F} - y' \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = \mathrm{C}.$$

Agora,

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = \frac{\mu g y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

Substituindo $\bar{F}$ e $\partial \bar{F} / \partial y'$ na identidade de Beltrami e multiplicando ambos os lados por $\sqrt{1 + y'^2}$:

$$(\mu g y + \lambda) \left(1 + y'^2\right) - (\mu g y + \lambda)\, y'^2 = \mathrm{C} \left(1 + y'^2\right)^{1/2}.$$

Simplificando:

$$\mu g y + \lambda = \mathrm{C} \left(1 + y'^2\right)^{1/2}; \qquad \text{(A)}.$$

Elevando (A) ao quadrado e rearranjando:

$$y'^2 = \frac{(\mu g y + \lambda)^2 - \mathrm{C}^2}{\mathrm{C}^2}; \qquad \text{(B)}.$$

Derivando (B) e subsituindo (A) no resultado obtemos finalmente

$$y'' = \frac{\mu g}{\mathrm{C}} \left(1 + y'^2\right)^{1/2},$$

ou trocando por conveniência a notação:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

onde definimos

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\mu g}{\mathrm{C}}.$$

Esta equação não-linear pode ser resolvida da seguinte forma: definimos

$$p = \frac{dy}{dx}; \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Então

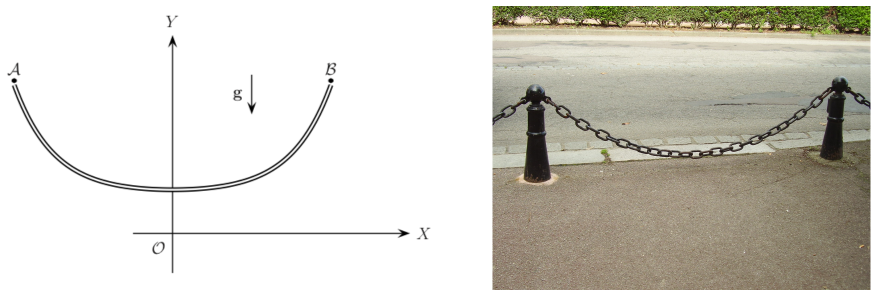

Figura 1: A catenária. (Imagem Wikipedia)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\kappa}\sqrt{1+p^2},$$

ou

$$dx = \frac{\kappa\, dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Integrando:

$$x = \kappa \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \mathrm{C}_1 = \kappa \sinh^{-1}(p) + \mathrm{C}_1.$$

Portanto,

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x - \mathrm{C}_1}{\kappa}\right).$$

Integrando uma vez mais,

$$y(x) = \kappa \cosh\left(\frac{x - \mathrm{C}_1}{\kappa}\right) + \mathrm{C}_2.$$

Esta é a equação da **catenária** (do latin *catena*=cadeia, elo). Por simplicidade, façamos $\mathrm{C}_2 = 0$ (ou se você preferir redefina o zero do eixo OY: $\bar{y}(x) = y(x) - \mathrm{C}_2$). Para construir uma catenária simétrica em torno do eixo OY façamos $\mathrm{C}_1 = 0$. Então

$$y(x) = \kappa \cosh\left(\frac{x}{\kappa}\right).$$

Resta-nos ajustar o valor de κ para que a solução passe pelos pontos $A(a,b)$ e $A(-a,b)$. ■