Tópicos de Física Clássica I – Aula 2
As equações de Euler-Lagrange

a c tort

O princípio da ação mínima

O que é o princípio da ação mínima? Como se usa a formulação lagrangiana da mecânica em um problema? A melhor maneira de responder a estas duas perguntas é por meio de um exemplo concreto.

Exemplo 1 *Movimento de um projétil em um campo gravitacional uniforme*

Considere um projétil que se move em um campo gravitacional uniforme. A diferença entre a sua energia cinética T e a sua energia potencial U se escreve:

$$T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy,$$

onde o ponto indica a derivada em relação ao tempo, isto é:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x; \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_y.$$

A ação S é definida pela integral:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} (T - U)\, dt = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy\right] dt,$$

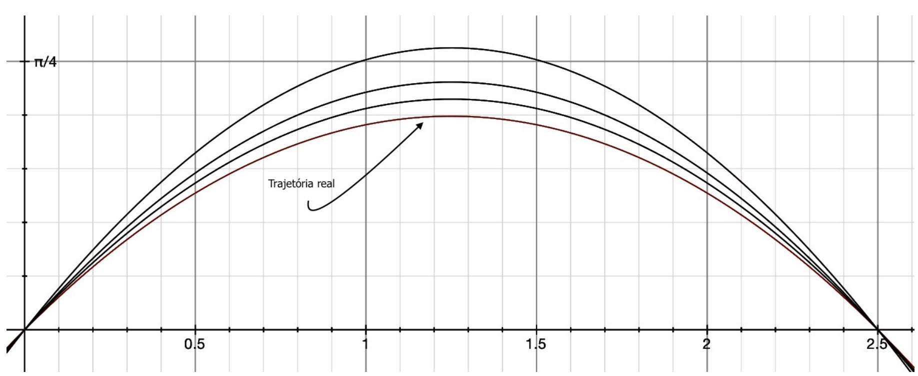

Figura 1: Movimento de um projétil em um campo gravitacional uniforme.

onde $\Delta t = t_b - t_a$ é a duração do movimento. Esta duração é fixa, isto é: t_a e t_b são instantes de tempo fixos. O valor de S depende da escolha da trajetória seguida pelo corpo entre o ponto inicial e o ponto final do movimento, e essa curva é descrita na forma parametrizada por duas funções: $x(t)$ e $y(t)$. A pergunta que fazemos agora é: **Para quais escolhas de $x(t)$ e $y(t)$, o valor de S é um mínimo?** Para responder a esta pergunta suponha que $x(t)$ e $y(t)$ sejam as representações paramétricas da trajetória **verdadeira**, agora imaginemos um desvio desta trajetória:

$$x(t,\epsilon) = x(t) + \epsilon\,\eta_1(t), \qquad y(t,\epsilon) = y(t) + \epsilon\,\eta_2(t),$$

onde ϵ é número real positivo, e $\eta_1(t_a) = \eta_1(t_b) = 0$ e $\eta_2(t_a) = \eta_2(t_b) = 0$, isto é os pontos inicial e final da trajetória não são modificados. As velocidades se escrevem:

$$\dot{x}(t,\epsilon) = \dot{x}(t) + \epsilon\,\dot{\eta}_1(t), \qquad \dot{y}(t,\epsilon) = \dot{y}(t) + \epsilon\,\dot{\eta}_2(t).$$

A ação agora se escreve:

$$S(\epsilon) = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{m}{2} \left[(\dot{x} + \epsilon\,\dot{\eta}_1)^2 + (\dot{y} + \epsilon\,\dot{\eta}_2)^2 \right] - mgy \right\} dt.$$

A variação da ação ΔS é

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(\epsilon) - S(0) = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{m}{2} \left[(\dot{x} + \epsilon\,\dot{\eta}_1)^2 + (\dot{y} + \epsilon\,\dot{\eta}_2)^2 \right] - mgy \right\} dt \\ &- \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - mgy \right] dt. \end{aligned}$$

Efetuando os quadrados, simplificando e rescrevendo convenientemente o resultado obtemos:

$$\Delta S = S(\epsilon) - S(0) = \int_{t_a}^{t_b} \left[\left(m\,\epsilon\,\frac{dx}{dt}\,\frac{d\eta_1}{dt} + m\,\epsilon\,\frac{dy}{dt}\,\frac{d\eta_2}{dt} \right) - mg\,\epsilon\eta_2 \right] dt.$$

Integrando por partes os dois primeiros termos do lado direito desta equação[1]

$$\Delta S = m\,\epsilon\,\frac{dx}{dt}\eta_1|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\epsilon\eta_1\,dt + m\,\epsilon\,\frac{dy}{dt}\eta_2|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} m\,\frac{d^2y}{dt^2}\,\epsilon\eta_2\,dt - \int_{t_a}^{t_b} mg\,\epsilon\eta_2\,dt.$$

Como $\eta_1(t_a) = \eta_1(t_b) = 0$ e $\eta_2(t_a) = \eta_2(t_b) = 0$, ficamos com

[1] Lembre-se que

$$\int v du = uv - \int u dv$$

$$\Delta S = \int_{t_a}^{t_b} (-m\ddot{x})\ \epsilon\eta_1\, dt + \int_{t_a}^{t_b} (-m\ddot{y} - mg)\ \epsilon\eta_2\, dt.$$

Agora escolhemos um ϵ infinitesimalmente pequeno e exigimos que em primeira ordem em ϵ, a variação da ação seja nula,

$$\Delta S \to \delta S = \int_{t_a}^{t_b} (-m\ddot{x})\ \epsilon\eta_1\, dt + \int_{t_a}^{t_b} (-m\ddot{y} - mg)\ \epsilon\eta_2\, dt. = 0.$$

Dado que nossa escolha de $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$ é arbitrária, podemos escrever:

$$-m\ddot{x} = 0, \qquad \text{e} \qquad -m\ddot{y} - mg = 0,$$

que são as equações de movimento do projétil em um campo gravitacional uniforme. As soluções são:

$$x(t) = C_{x1}t + C_{x2} \qquad \text{e} \qquad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_{y1}t + C_{y2},$$

onde $= C_{x1}, = C_{x2}, C_{y1}, C_{y2}$, são constantes de integração e são determinadas com as condições iniciais da posição e velocidade iniciais do projétil. Desta maneira, o **princípio da ação mínima** leva às equações de movimento cuja solução nos dá a trajetória correta do projétil. ■

Naturalmente, há um procedimento geral para resolver problemas de mecânica na abordagem lagrangiana. Eis, as regras, **aceite-as sem demonstração, por enquanto**.

(a) Escolha um referencial inercial e um sistema de coordenadas (vamos ficar com as cartesianas por enquanto);

(b) escreva a energia cinética T e a energia potencial U do sistema que você está estudando;

(c) escreva a função de Lagrange ou lagrangiana L do sistema:

$$\text{energia cinética} - \text{energia potencial} = L = T - U.$$

A ação é definida pela integral de L entre dois tempos fixos:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} (T - U)\, dt.$$

A trajetória que minimiza a ação deve satisfazer à equação de Euler-Lagrange correspondente:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

A última linha gera a equação de movimento do sistema! Resolva esta equação e obtenha a posição e a velocidade em qualquer instante de tempo t. Se o problema for em 3D, haverá duas equações de E-L mais:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0.$$

Exemplo 2 *O oscilador harmônico simples*

Vejamos um sistema simples, sem vínculos. Considere um oscilador harmônico simples (OHS). Sua energia cinética se escreve

$$T = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2,$$

e sua energia potencial

$$U = \frac{1}{2}\,\kappa x^2.$$

A função de Lagrange ou lagrangiana deste sistema é definida por

$$L = T - U = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,\kappa x^2.$$

A equação de E-L:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

leva à

$$m\,\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

onde $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ é a frequência angular do oscilador. ■

Podemos trabalhar em duas ou três dimensões, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3 *A interação gravitacional entre a Terra e um satélite artificial.*

Como a massa da Terra é muito maior do que a massa do satélite, podemos considerá-la fixa. Escolheremos coordenadas cartesianas com origem no centro da Terra e o eixo OZ apontando para a estrela Polar, logo $q_1 = x$, $q_2 = y$, e $q_3 = z$. A energia cinética do satélite escreve:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right),$$

e a energia potencial é

$$U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Portanto, a lagrangiana se escreve

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

As equações de Euler-Lagrange se escrevem:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0;$$

Agora,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{GMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Portanto,

$$-\frac{GMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$

ou ainda,

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Da mesma forma obtemos as equações de movimento nas direções OY e OZ:

$$\ddot{y} = -\frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$\ddot{z} = -\frac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

■

Exemplo 4 *A máquina de Atwood.*

Uma máquina de Atwood consiste de dois blocos de mass m_1 e m_2 unidos por um fio de massa desprezível que passa por uma roldana de massa também desprezível, veja a Figura 2. Para este sistema escolhemos $q_1 = x_1$ e $q_2 = x_2$. O vínculo é dado por

$$x_1 + x_2 = \text{C=constante}.$$

Esseencialmente, a constante é o comprimento total do fio ℓ, pois para qualquer t, $x_1+x_2+\ell_R = \ell$, onde ℓ_R é o comprimento do fio em contato com a roldana[2]. O vínculo implica que $\dot{x}_1+\dot{x}_2 = 0$ e $\ddot{x}_1+\ddot{x}_2 = 0$, isto é: as velocidades e acelerações

[2]Mais tarde veremos que vínculos que envolvem somente as coordenadas e o tempo, que não é o caso aqui, são chamados vínculos holonômicos.

dos blocos são iguais em módulo, mas têm sentidos opostos. A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}\, m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\,(\,m_1 + m_2)\, \dot{x}_1^2.$$

A energia potencial se escreve

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = (m_1 - m_2) g x_1 + \text{termo constante}.$$

O lagrangiano do sistema é

$$L = T - U = \frac{1}{2}\,(\,m_1 + m_2)\, \dot{x}_1^2 - (m_1 - m_2) g x_1 + \text{termo constante}.$$

A equação de Euler-Lagrange para x_1 se escreve:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0.$$

Como $L_{x_1} = -(m_1 - m_2)\, g$, e $L_{\dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1$, segue que

$$-(m_1 - m_2)\, g - (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = 0,$$

logo, a aceleração do bloco 1 é

$$\ddot{x}_1 \equiv a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

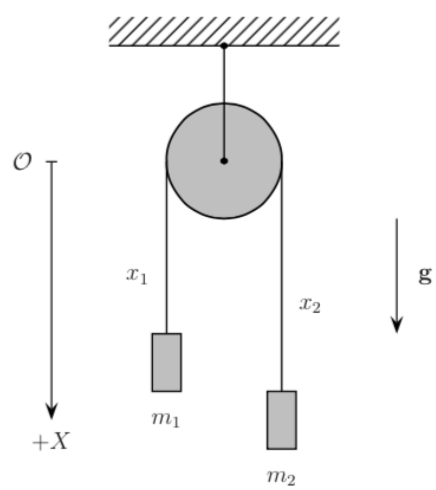

Figura 2: A máquina de Atwood via mecânica lagrangiana.

A aceleração do bloco 2 é

$$a_2 = -a_1 = -\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\, g.$$

Compare com a solução newtoniana. ■

As equações de Euler-Lagrange valem também para outros tipos de coordenadas, por exemplo, coordenadas esféricas, cilíndricas, plano-polares e outras!. Também podem ser escritas em referenciais não-inerciais se você escrevê-las inicialmente em um referencial inercial. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5 *O pêndulo simples.* Considere um pêndulo de massa m e comprimento ℓ. A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2}\, m\ell^2\dot{\theta}^2,$$

e a energia potencial por

$$U = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

A equação de E-L para a coordenada θ é

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

Segue que

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin\theta;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}.$$

Substituido na equação de E-L:

$$-mg\ell\sin\theta - \frac{d}{dt}\,(m\ell^2\dot{\theta}) = 0.$$

Simplificando

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta = 0,$$

que é a equação de movimento do pêndulo simples. Observe que esta equação é não-linear. Na aproximação linear podemos escrever $\sin\theta \approx \theta$, e então:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0,$$

e o pêndulo comporta-se como um oscilador harmônico simples (OHS) com período independente da amplitude. ■

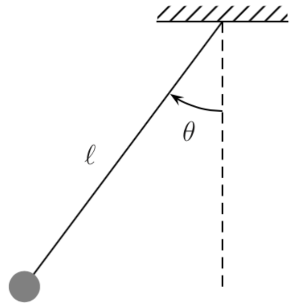

Figura 3: O pêndulo simples.

Exemplo 6 As equações de Euler-Lagrange e a mecânica newtoniana;

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, , z).$$

As equações de E-L são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad i =, x, y, z.$$

Considere $i = x$:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt}m\dot{x} = 0, \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

mas

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = F_x.$$

O mesmo cácalculo pode ser feito para $i =, y, z$. Portanto, as equações de E-L levam à equação newtoniana de movimento.

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Veremos que isto pode ser generalizado para incluir potenciais dependentes do tempo, isto é: $U(x, y, z, t)$. ■

Nas próximas aulas veremos como são obtidas as equações de Euler-Lagrange, mas antes aprenderemos algo sobre o cálculo variacional, a linguagem matemática da formulação de Lagrange da mecânica.