Tópicos de Física Clássica I – Aula 10
A integral de Jacobi e a energia mecânica; o hamiltoniano; equações de Hamilton

a c tort

A integral de Jacobi e a energia mecânica

Como mencionado anteriormente, nem sempre a a integral de Jacobi coincide com a energia mecânica do sistema. A melhor maneira de entender isto é por meio de um exemplo.

Exemplo 1 Considere uma conta de colar que desliza sem atrito ao longo de um fio rígido que gira com velocidade angular constante ω em torno de um eixo perpendicular ao plano que contém a conta e o fio girante. O lagrangiano se escreve

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right).$$

O vínculo é

$$\dot{\theta} - \omega = 0,$$

que pode ser integrado:

$$\theta - \omega t - C = 0.$$

O vínculo é holonômico e reonômico. Fazendo uso do vínculo escrevemos

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right).$$

A equação de Euler-Lagrange nos dá

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0.$$

A integral de Jacobi (veja a nota de aula anterior),

$$h = \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_i - L, \tag{1}$$

neste caso ($g = 1$) é dada por

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\, \dot{r} - L = \frac{m}{2}\, \left(\dot{r}^2 - r^2\omega^2\right).$$

A integral de Jacobi é uma constante de movimento, pois

$$\frac{dh}{dt} = m\dot{r}(\ddot{r} - r\omega^2) = 0,$$

graças à equação de movimento, mas a energia mecânica:

$$E = \frac{m}{2}\, \left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right),$$

não é uma constante de movimento, isto é: a integral de Jacobi não é a energia mecânica da partícula, pois

$$\frac{dE}{dt} = 2mr\dot{r}\omega^2 \neq 0.$$

A razão pela qual a energia mecânica não é uma constante de movimento é simples: a força de vínculo realiza trabalha sobre a conta de colar. ■

Em que condições a integral de Jacobi é uma constante de movimento? A resposta é simples: quando o lagrangiano do sistema não depende explicitamente do tempo. Para demonstrá-la considere a equação (1) e sua derivada total em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \sum_{i=1}^{g} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i - \frac{dL}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{g} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial L}{\partial q_i}\, \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{g} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Usando a equação de Euler-Lagrange obtemos finalmente

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{2}$$

A integral de Jacobi é uma constante de movimento quando o lagrangiano do sistema não depende explicitamente do tempo que é exatamente o caso do exemplo anterior.

As equações de Hamilton

Com a integral de Jacobi podemos construir uma outra função a partir da qual podemos descrever um sistema dinâmico: **a função de Hamilton**, ou **hamiltoniana**. Como vimos anteriormente, o momento generalizado (ou momento canônico) é definido por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3}$$

que permite rescrever a equação (1) como uma função de p_i e q_i:

$$H = H(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, t) = \sum_{i=1}^{g} p_1 \dot{q}_1 - L,$$

desde que $\dot{q}_i$ seja substituído por p_i com o auxílio da equação (3). Veja como o processo funciona no exemplo abaixo.

Exemplo 2 *A hamiltoniana de um oscilador harmônico simples.*

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{\kappa q^2}{2}; \qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2}.$$

■

Calculemos agora o diferencial de $H(\mathfrak{q},\mathfrak{p},t)$:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{g}(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL \\ &= \sum_{i=1}^{g}\dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^{g} p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \sum_{i=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{g}\dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \end{aligned}$$

Fazendo uso das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i,$$

logo,

$$dH = \sum_{i=1}^{g}\dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{g}\dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{4}$$

Por outro lado, como $H = H(\mathfrak{p},\mathfrak{q},t)$, temos

$$dH = \sum_{i=1}^{g}\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \sum_{i=1}^{g}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt. \tag{5}$$

Comparando as expressões (4) e (5) para dH segue que:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \qquad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{6}$$

Estas são as **equações de Hamilton** ou **equações canônicas do movimento** para um sistema mecânico descrito por uma função hamiltoniana H.

Exemplo 3 *Equações de Hamilton para o OHS.*

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2}.$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m}; \qquad -\dot{p} = \kappa q.$$

Derivando a primeira equação de Hamilton e substituindo na segunda obtemos

$$\ddot{q} + \frac{\kappa}{m}\,q = 0,$$

que é a equação diferencial que governa um oscilador harmônico simples. ■

Quando H é a energia do sistema mecânico?

Para H também vale a relação (verifique!):

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Substituindo as equações de Hamilton na equação (5),

$$dH = \sum_{i=1}^{g} \dot{q}_i\, dp_i - \sum_{i=1}^{g} \dot{p}_i\, dq_i + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt.$$

ou ainda:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{g} \dot{q}_i\, \dot{p}_i - \sum_{i=1}^{g} \dot{p}_i\, \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt.$$

Segue que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{7}$$

Isto é: a hamiltoniana é uma constante de movimento quando não depende explicitamente do tempo. Se o potencial U não depender das velocidades generalizadas e as transformações das coordenadas cartesianas x_i, y_i, z_i para as coordenadas generalizadas q_i também não dependerem explicitamente do tempo, então, H é da forma $T + U$ e poderá ser identificada com a energia mecânica do sistema.

Referências

[1] N. A. Lemos *Mecânica Analitica* (Livraria da Física Editora; São Paulo) 2004.

[2] A. S. de Castro *Exploring a rheonomic system* arXiv: physics/9912049v1 [physics.class-ph] 23 Dec 1999.