Métodos Matemáticos

O plano complexo: aplicações à cinemática e dinâmica

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

20 de agosto de 2012

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sejam duas funções reais da variável real t que supomos contínuas para $t \in [t_1, t_2]$. As equações $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ ou:

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sejam duas funções reais da variável real t que supomos contínuas para $t \in [t_1, t_2]$. As equações $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ ou:

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t),$$

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sejam duas funções reais da variável real t que supomos contínuas para $t \in [t_1, t_2]$. As equações $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ ou:

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t),$$

ou ainda, em notação informal:

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sejam duas funções reais da variável real t que supomos contínuas para $t \in [t_1, t_2]$. As equações $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ ou:

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t),$$

ou ainda, em notação informal:

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sejam duas funções reais da variável real t que supomos contínuas para $t \in [t_1, t_2]$. As equações $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ ou:

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t),$$

ou ainda, em notação informal:

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

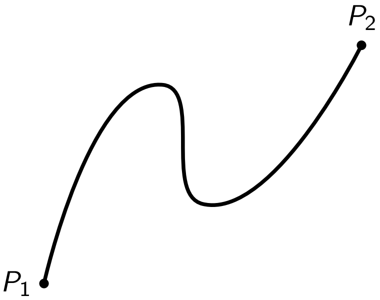
definem uma **curva contínua** ou **arco** no plano complexo que une os pontos $P_1 = z(t_1)$ e $P_2 = z(t_2)$.

Se $z(t_1) = z(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, isto é: $P_1 = P_2$, a curva é **fechada**.

Se $z(t_1) = z(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, isto é: $P_1 = P_2$, a curva é **fechada**. Uma curva que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é dita ser uma **curva simples**.

Se $z(t_1) = z(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, isto é: $P_1 = P_2$, a curva é **fechada**.
Uma curva que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é dita ser uma **curva simples**.
Se $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ tiverem derivadas contínuas no intervalo fechado $[t_1, t_2]$, a curva será **curva ou arco suave**.

Se $z(t_1) = z(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, isto é: $P_1 = P_2$, a curva é **fechada**.
Uma curva que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é dita ser uma **curva simples**.
Se $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ tiverem derivadas contínuas no intervalo fechado $[t_1, t_2]$, a curva será **curva ou arco suave**.
Uma curva composta por um número finito de arcos suaves é chamada **contínua por partes** ou **secionalmente contínua**.



Posição, velocidade no plano complexo

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)},$$

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)},$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)},$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

$$\tilde{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)},$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

$$\tilde{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Na representação cartesiana:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt},$$

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)},$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

$$\tilde{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Na representação cartesiana:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt},$$

e na representação polar:

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)},$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

$$\tilde{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Na representação cartesiana:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt},$$

e na representação polar:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} e^{i\theta(t)} + ir\frac{d\theta(t)}{dt} e^{i\theta(t)}.$$

Aceleração

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Na representação cartesiana a **aceleração instantânea** se escreve:

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Na representação cartesiana a **aceleração instantânea** se escreve:

$$\tilde{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + i\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Na representação cartesiana a **aceleração instantânea** se escreve:

$$\tilde{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + i\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

e na representação polar:

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Na representação cartesiana a **aceleração instantânea** se escreve:

$$\tilde{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + i \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

e na representação polar:

$$\tilde{a}(t) = \left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right] e^{i\theta} + i \left(2 \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + r \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right) e^{i\theta}.$$

Exemplo: movimento circular uniforme

Exemplo: movimento circular uniforme

Considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio R percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

Exemplo: movimento circular uniforme

Considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio R percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad \text{e} \quad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

onde ω é a magnitude da velocidade angular. Multiplicando a coordenada y por i e somando com a coordenada x:

Exemplo: movimento circular uniforme

Considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio R percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad \text{e} \quad y(t) = R\,\text{sen}\,\omega t,$$

onde ω é a magnitude da velocidade angular. Multiplicando a coordenada y por i e somando com a coordenada x:

$$x(t) + iy(t) = R\left(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t\right),$$

Exemplo: movimento circular uniforme

Considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio R percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad \text{e} \quad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

onde ω é a magnitude da velocidade angular. Multiplicando a coordenada y por i e somando com a coordenada x:

$$x(t) + iy(t) = R\left(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t\right),$$

ou, fazendo uso da fórmula de Euler:

Exemplo: movimento circular uniforme

Considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio R percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad \text{e} \quad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

onde ω é a magnitude da velocidade angular. Multiplicando a coordenada y por i e somando com a coordenada x:

$$x(t) + iy(t) = R\left(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t\right),$$

ou, fazendo uso da fórmula de Euler:

$$z(t) = R\,\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

A velocidade instantânea é dada por:

A velocidade instantânea é dada por:

$$\tilde{v} = \frac{dz}{dt} = i\omega z = \mathrm{e}^{i\pi/2}\,\omega z,$$

A velocidade instantânea é dada por:

$$\tilde{v} = \frac{dz}{dt} = i\omega z = \mathrm{e}^{i\pi/2}\,\omega z,$$

que geometricamente significa girar z de $\pi/2$ no sentido anti-horário e multiplicar o resultado por ω Figura 7(a). A aceleração instantânea é dada por:

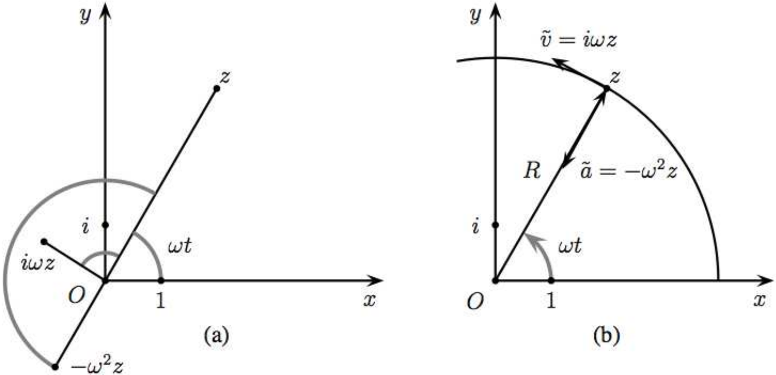
A velocidade instantânea é dada por:

$$\tilde{v} = \frac{dz}{dt} = i\omega z = e^{i\pi/2}\,\omega z,$$

que geometricamente significa girar z de $\pi/2$ no sentido anti-horário e multiplicar o resultado por ω Figura 7(a). A aceleração instantânea é dada por:

$$\tilde{a} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z = e^{i\pi}\,\omega^2 z,$$

isto é: giramos z no sentido anti-horário de π e multiplicamos o resultado pelo real $-\omega^2$, veja a Figura 7(a).


y
z
i
$i\omega z$
ωt
O
1
x
$-\omega^2 z$
(a)
y
$\tilde{v} = i\omega z$
z
R
$\tilde{a} = -\omega^2 z$
i
ωt
O
1
x
(b)

Dinâmica bidimensional no plano complexo

Dinâmica bidimensional no plano complexo

Dinâmica newtoniana no plano complexo significa resolver a equação newtoniana de movimento:

Dinâmica bidimensional no plano complexo

Dinâmica newtoniana no plano complexo significa resolver a equação newtoniana de movimento:

$$\boxed{\tilde{F} = m\tilde{a}}$$

Dinâmica bidimensional no plano complexo

Dinâmica newtoniana no plano complexo significa resolver a equação newtoniana de movimento:

$$\boxed{\tilde{F} = m\tilde{a}}$$

com as condições iniciais:

Dinâmica bidimensional no plano complexo

Dinâmica newtoniana no plano complexo significa resolver a equação newtoniana de movimento:

$$\boxed{\tilde{F} = m\tilde{a}}$$

com as condições iniciais:

$$z(0) = z_0 = x_0 + iy_0, \quad \text{e} \quad \frac{dz(0)}{dt} = \tilde{v}_0 = v_{x0} + iv_{y0},$$

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;

(ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;

(ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;

(iii) o oscilador forçado;

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;

(ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;

(iii) o oscilador forçado;

(iv) o referencial girante; o pêndulo de Foucault;

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;

(ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;

(iii) o oscilador forçado;

(iv) o referencial girante; o pêndulo de Foucault;

(v) partícula carregada em um campo magnético uniforme;

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;

(ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;

(iii) o oscilador forçado;

(iv) o referencial girante; o pêndulo de Foucault;

(v) partícula carregada em um campo magnético uniforme;

(vi) o problema da força central;

(i) 0 oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;
(ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;
(iii) o oscilador forçado;
(iv) o referencial girante; o pêndulo de Foucault;
(v) partícula carregada em um campo magnético uniforme;
(vi) o problema da força central;

Discutiremos alguns desses exemplos nas próximas aulas.