Métodos Matemáticos

Números complexos I

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

13 de agosto de 2012

Conjuntos de números

Conjuntos de números

- O conjunto dos números naturais:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

Conjuntos de números

- O conjunto dos números naturais:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

- O conjunto dos números naturais incluindo o zero:

$$\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

Conjuntos de números

- O conjunto dos números naturais:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

- O conjunto dos números naturais incluindo o zero:

$$\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

- O conjuntos dos inteiros (que inclui o zero e os inteiros negativos)

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\},$$

- O conjunto dos números racionais ou frações, números que pode ser postos na forma a/b, onde $a, b \in \mathbf{Z}$, mas com $b \neq 0$. Denotamos esse conjunto por $\mathbf{Q}$.

- O conjunto dos números racionais ou frações, números que pode ser postos na forma a/b, onde $a, b \in \mathbf{Z}$, mas com $b \neq 0$. Denotamos esse conjunto por $\mathbf{Q}$.
- O conjuntos dos números irracionais $\mathbf{I}$, isto é, aqueles que não podem ser escritos em forma de fração, por exemplo: $\sqrt{2} = 1,41423\cdots$, $\pi = 3,14159\cdots$.

- O conjunto dos números racionais ou frações, números que pode ser postos na forma a/b, onde $a, b \in \mathbf{Z}$, mas com $b \neq 0$. Denotamos esse conjunto por $\mathbf{Q}$.
- O conjuntos dos números irracionais $\mathbf{I}$, isto é, aqueles que não podem ser escritos em forma de fração, por exemplo: $\sqrt{2} = 1,41423 \cdots$, $\pi = 3,14159 \cdots$.
- O conjuntos dos números reais, $\mathbf{R}$, que resulta da união do conjuntos dos mencionados acima, mais precisamente dos racionais (que já inclui os inteiros) e dos irracionais.

Cardano: *Artis magnae sive de regulis algebraicis* 1545

No texto, seguinte problema é proposto:

Cardano: *Artis magnae sive de regulis algebraicis* 1545

No texto, seguinte problema é proposto:

Dividir 10 em duas partes de tal modo que seu produto seja 40 .

Cardano: *Artis magnae sive de regulis algebraicis* 1545

No texto, seguinte problema é proposto:

Dividir 10 em duas partes de tal modo que seu produto seja 40 .

Denotando as partes por x e y, podemos traduzir o enunciado da seguinte forma:

$$x + y = 10,$$

$$xy = 40.$$

Cardano: *Artis magnae sive de regulis algebraicis* 1545

No texto, seguinte problema é proposto:

Dividir 10 em duas partes de tal modo que seu produto seja 40 .

Denotando as partes por x e y, podemos traduzir o enunciado da seguinte forma:

$$x + y = 10,$$

$$xy = 40.$$

Elevando a primeira equação ao quadrado:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 100,$$

Cardano: *Artis magnae sive de regulis algebraicis* 1545

No texto, seguinte problema é proposto:

Dividir 10 em duas partes de tal modo que seu produto seja 40 .

Denotando as partes por x e y, podemos traduzir o enunciado da seguinte forma:

$$x + y = 10,$$

$$xy = 40.$$

Elevando a primeira equação ao quadrado:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 100,$$

e multiplicando a segunda por -4:

$$-4xy = -160.$$

Somando as duas equações:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60,$$

ou,

Somando as duas equações:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60,$$

ou,

$$(x - y)^2 = -60.$$

logo,

Somando as duas equações:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60,$$

ou,

$$(x - y)^2 = -60.$$

logo,

$$x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}.$$

Agora temos o sistema linear:

Somando as duas equações:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60,$$

ou,

$$(x - y)^2 = -60.$$

logo,

$$x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}.$$

Agora temos o sistema linear:

$$x + y = 10,$$

$$x - y = \pm 2\sqrt{-15}.$$

Segue que:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15},$$

e

$$y = 5 \mp \sqrt{-15}.$$

É fácil comprovar que este é o resultado correto se manipularmos estes resultados com as regras ordinárias da álgebra.

Cardano considerou o resultado final “tão sútil quanto inútil, ”provavelmente seguindo a tradição herdada da matemática grega, pois não lhe encontra uma interpretação geométrica

Geometrização

Geometrização

- Casper Wessel (1745-1818) em 1799 publicou uma memória nos Anais da Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras com o título *Sobre a representação analítica da direção*, na qual além da representação geométrica dos complexos, apresenta o modo de combiná-los.

Geometrização

- Casper Wessel (1745-1818) em 1799 publicou uma memória nos Anais da Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras com o título *Sobre a representação analítica da direção*, na qual além da representação geométrica dos complexos, apresenta o modo de combiná-los.
- A solução de Wessel, só aparentemente muito simples, consiste em considerar o eixo cartesiano x como representando os reais e o eixo cartesiano y, os números puramente imaginários. Um número complexo $a + b\sqrt{-1}$ pode ser considerado como o par ordenado (a, b) no plano cartesiano.

Geometrização

- Casper Wessel (1745-1818) em 1799 publicou uma memória nos Anais da Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras com o título *Sobre a representação analítica da direção*, na qual além da representação geométrica dos complexos, apresenta o modo de combiná-los.
- A solução de Wessel, só aparentemente muito simples, consiste em considerar o eixo cartesiano x como representando os reais e o eixo cartesiano y, os números puramente imaginários. Um número complexo $a + b\sqrt{-1}$ pode ser considerado como o par ordenado (a, b) no plano cartesiano.
- Jean-Robert Argand, desconhecedor do trabalho de Wessel, redescobriu a solução e a publicou por conta própria em 1806, com o título *Ensaio sobre uma maneira de representar quantidades imaginárias nas construções geométricas.* Argand introduziu também o conceito de módulo de um número complexo. Em 1813, o ensaio de Argand foi republicado na revista francesa *Annales Mathématiques*.

Diagrama de Argand

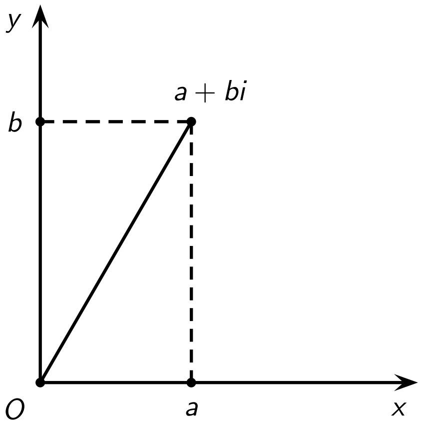


Figura: O diagrama de Argand.

Pouco a pouco, a natureza dos números complexos foi sendo desvelada. Coube ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) completar o entendimento dos complexos. Contribuições cruciais foram feitas por Karl Friedrich Gauss (1777-1855). pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865). Hamilton, que abominava a interpretação geométrica dos complexos, considerou o número $a + bi$ como o par ordenado (a, b) e desenvolveu sua álgebra. Gauss introduziu o termo *complexo* e também desenvolveu uma interpretação geométrica, mas fiel ao seu lema, *pauca sed matura* (pouco, mas maduro), não publicou os resultados até considerá-los satisfatórios. O diagrama de Argand é também chamado (exceto na França!) **plano de Gauss**.

A álgebra dos complexos

A álgebra dos complexos

As regras básicas para operar com os números complexos são essencialmente as mesmas que empregamos com os números reais. Introduzindo a notação: $\sqrt{-1} = i$, devida a Euler, e lembrando sempre de fazer a substituição $i^2 \to -1$, quando for o caso, essas regras são:

(i) Adição:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

(i) Adição:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

(ii) Subtração:

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i$$

(i) Adição:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

(ii) Subtração:

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i$$

(iii) Multiplicação:

$$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$

(i) Adição:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

(ii) Subtração:

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i$$

(iii) Multiplicação:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$

(iv) Divisão:

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}\\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

O **valor absoluto** de um número complexo é definido por:

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

interpretação geométrica: é a distância da origem ao ponto P do plano que associamos com o número complexo.

O **valor absoluto** de um número complexo é definido por:

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

interpretação geométrica: é a distância da origem ao ponto P do plano que associamos com o número complexo.

Notação alternativa: z associado com um ponto do $\mathbf{R}^2$ descrito pelo par ordenado $z = (x, y)$, ou na forma "vetorial"

$$z = x + iy,$$

O **valor absoluto** de um número complexo é definido por:

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

interpretação geométrica: é a distância da origem ao ponto P do plano que associamos com o número complexo.

Notação alternativa: z associado com um ponto do $\mathbf{R}^2$ descrito pelo par ordenado $z = (x, y)$, ou na forma "vetorial"

$$z = x + iy,$$

e seu **complexo conjugado** por:

$$z^* = x - iy,$$

A representação plano-polar de um número complexo

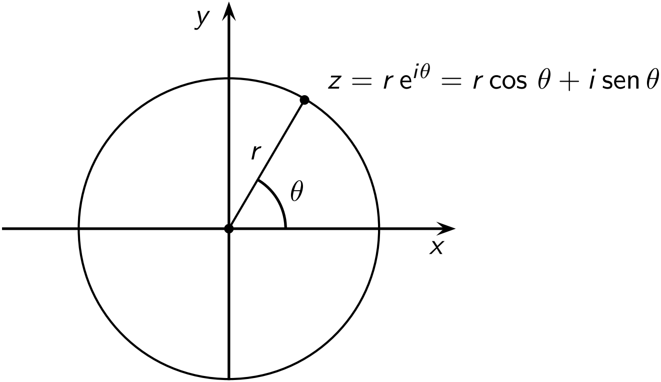


Figura: Representação polar de um número complexo.

É fácil ver que um número complexo pode ser escrito como:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esta é a forma polar do número complexo.

É fácil ver que um número complexo pode ser escrito como:

$$z = x + iy = r \cos\theta + ir \operatorname{sen}\theta.$$

Esta é a forma polar do número complexo. A expansão da função cosseno é dada por:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots ,$$

É fácil ver que um número complexo pode ser escrito como:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esta é a forma polar do número complexo. A expansão da função cosseno é dada por:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\ ,$$

e a expansão da função seno é dada por:

É fácil ver que um número complexo pode ser escrito como:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esta é a forma polar do número complexo. A expansão da função cosseno é dada por:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots,$$

e a expansão da função seno é dada por:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + -\frac{\theta^5}{5!}\cdots.$$

É fácil ver que um número complexo pode ser escrito como:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esta é a forma polar do número complexo. A expansão da função cosseno é dada por:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots,$$

e a expansão da função seno é dada por:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + -\frac{\theta^5}{5!}\cdots.$$

Por outro lado, a expansão da função exponencial se lê:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Se fizermos a substituição $x \rightarrow i\theta$ na expansão da exponencial, obteremos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots .$$

lembrando que $i^2 = -1$, $i^3 = ii^2 = -i$, etc., vemos que podemos escrever:

Se fizermos a substituição $x \rightarrow i\theta$ na expansão da exponencial, obteremos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots .$$

lembrando que $i^2 = -1$, $i^3 = ii^2 = -i$, etc., vemos que podemos escrever:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.}$$

Esta é a **fórmula de Euler** descoberta por volta de 1740, uma das contribuições cruciais de Leonhard Euler (1707-1783) à teoria dos números complexos. A fórmula de Euler permite-nos escrever um número complexo na forma polar como:

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

O complexo conjugado z^* se escreve:

$$z^* = r\,\mathrm{e}^{-i\theta} = r\left(\cos\,\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta\right).$$

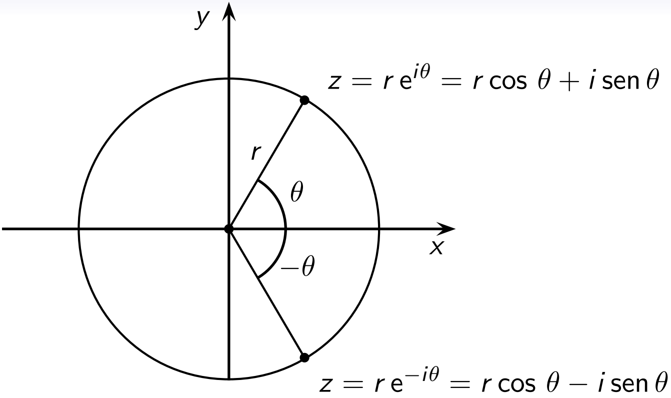


Figura: Um número complexo e seu conjugado representados na forma polar.

A distância radial r é o **módulo** do número complexo e ângulo θ, o seu **argumento**.

Observe que para um dado r,

$$\arg(z) = \theta$$

com:

$$\arg(z) + 2\kappa\pi = \theta + 2\kappa\pi, \qquad \kappa \in \mathbf{Z},$$

representam o mesmo número complexo!

Na representação cartesiana, um ponto do $\mathbf{R}^2$ representa um único complexo, mas na representação plano-polar, o mesmo complexo tem infinitas representações.

Produtos escalar e vetorial

Produtos escalar e vetorial

O **produto escalar** entre dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$, e $z_2 = x_2 + iy_2$ é definido por:

$$z_1 \cdot z_2 := \frac{1}{2}\left(z_1^* z_2 + z_1 z_2^*\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

Produtos escalar e vetorial

O **produto escalar** entre dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$, e $z_2 = x_2 + iy_2$ é definido por:

$$z_1 \cdot z_2 := \frac{1}{2}\left(z_1^* z_2 + z_1 z_2^*\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

e o **produto vetorial** por:

Produtos escalar e vetorial

O **produto escalar** entre dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$, e $z_2 = x_2 + iy_2$ é definido por:

$$z_1 \cdot z_2 := \frac{1}{2}\left(z_1^* z_2 + z_1 z_2^*\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

e o **produto vetorial** por:

$$z_1 \times z_2 := \frac{1}{2i}\left(z_1^* z_2 - z_1 z_2^*\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Próxima aula:

Curvas, posição, velocidade e aceleração e dinâmica no plano complexo

Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sejam duas funções reais da variável real t que supomos contínuas para $t \in [t_1, t_2]$. As equações $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ ou:

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t),$$

ou ainda, em notação informal:

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

definem uma **curva contínua** ou **arco** no plano complexo que une os pontos $P_1 = z(t_1)$ e $P_2 = z(t_2)$. Se $z(t_1) = z(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, isto é: $P_1 = P_2$, a curva é fechada. Uma curva que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é dita ser uma **curva simples**.

Se $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ tiverem derivadas contínuas no intervalo fechado $[t_1, t_2]$, a curva será **curva ou arco suave**. Uma curva composta por um número finito de arcos suaves é chamada **contínua por partes** ou **secionalmente contínua**.

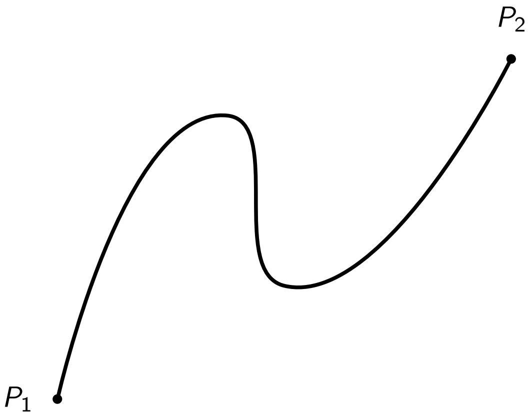


Figura: Curva suave.

Posição, velocidade no plano complexo

A **posição instantânea** de um ponto no instante t no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)},$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

$$\tilde{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Na representação cartesiana:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt},$$

e na representação polar:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}e^{i\theta(t)} + ir\frac{d\theta(t)}{dt}e^{i\theta(t)}.$$

Aceleração

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Na representação cartesiana a **aceleração instantânea** se escreve:

$$\tilde{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + i \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

e na representação polar:

$$\tilde{a}(t) = \left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right] e^{i\theta} + i \left(2 \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + r \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right) e^{i\theta}.$$

Exemplo: movimento circular uniforme

Como exemplo considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio R percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais. Tal movimento é dito movimento circular uniforme (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad \text{e} \quad y(t) = R\,\text{sen}\,\omega t,$$

onde ω é a magnitude da velocidade angular. Multiplicando a coordenada y por i e somando com a coordenada x:

$$x(t) + iy(t) = R\left(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t\right),$$

ou, fazendo uso da fórmula de Euler:

$$z(t) = R\,\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

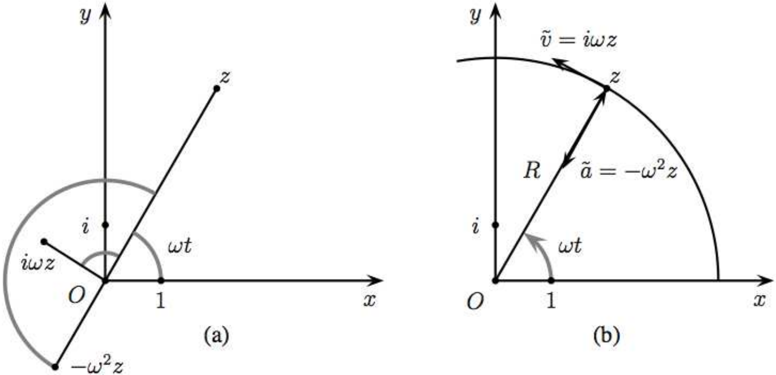
A velocidade instantânea é dada por:

$$\tilde{v} = \frac{dz}{dt} = i\omega z = \mathrm{e}^{i\pi/2}\,\omega z,$$

que geometricamente significa girar z de $\pi/2$ no sentido anti-horário e multiplicar o resultado por ω Figura **??**(a). A aceleração instantânea é dada por:

$$\tilde{a} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z = \mathrm{e}^{i\pi}\,\omega^2 z,$$

isto é: giramos z no sentido anti-horário de π e multiplicamos o resultado pelo real $-\omega^2$, veja a Figura **??**(a). A estreita relação existente entre os vetores geométricos (segmentos de reta orientados) no $\mathbf{R}^2$ e o plano complexo $\mathbf{C}$ permite o abuso de linguagem representado na Figura **??**(b).



y
z
i
$i\omega z$
ωt
O
1
x
$-\omega^2 z$
y
$\tilde{v} = i\omega z$
z
R
$\tilde{a} = -\omega^2 z$
i
ωt
O
1
x

(a) (b)