Métodos Matemáticos 2012/2 – Notas de Aula
Equações Diferencias IV

Equações Diferencias Lineares de Segunda Ordem

A C Tort*

22 de outubro de 2012

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é uma equação da forma:

$$a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = d(x), \tag{1}$$

ou ainda:

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = r(x). \tag{2}$$

Uma EDO de segunda ordem que não puder ser posta nesta forma é dita ser **não linear**. A Eq. (3) é linear em $y(x)$ e $y'(x)$, mas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são funções em princípio arbitrárias de x. Se $r(x) = 0$, isto é:

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0, \tag{3}$$

a EDO linear de segunda ordem é dita ser **homogênea**. A Eq. (2) é não homogênea ou inomogênea. As funções $p(x)$, $q(x)$ são muitas vezes chamadas de **coeficientes**. Eis alguns exemplos famosos de equações homogêneas:

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - x\, y'(x) + n\,(n+1)\; y(x) = 0, \qquad \text{(equação de Legendre)}$$

$$y''(x) + \frac{1}{x}\, y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\, y(x) = 0, \qquad \text{(equação de Bessel na forma padrão)}$$

$$x\;(1-x)\, y''(x) + \left[c - (a+b+1)\; x\right]\; y'(x) + ab\, y(x) = 0, \qquad \text{(equação de hipergeométrica de Gauss)}$$

Esses exemplos são muito importantes em física e aparecem quando lidamos com a teoria eletromagnética clássica e a mecânica quântica, por exemplo. Muitas vezes, os coeficientes da EDO linear de segunda ordem são constantes. É o caso do OHS:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = 0.$$

Mas o OH pode ser forçado levando a uma EDO linear de segundo grau inomogênea:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = F(t).$$

As EDO lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, como a equação que governa o comportamento do OHS, podem ser resolvidas com métodos algébricos, mas as que tem coeficientes funções de x requerem métodos mais sofisticados como por exemplo, soluções em forma de séries de potências em x. Dependendo das condições exigidas pelo problema físico, essas séries de potências podem transformar-se em polinômios de grau finito.

*email: tort@ufrj.br

EDO lineares de segundo grau homogêneas e o princípio da superposição

A solução geral de uma EDO linear do segundo grau homogênea em um intervalo aberto $\in I$ é dada por:

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x), \tag{4}$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções que não são proporcionais uma à outra em I, isto é: não são da forma $y_2(x) = \kappa\, y_1(x)$. C_1 e C_2 são constantes arbitrárias que podem ser determinadas com as condições iniciais (condições dadas no mesmo ponto x_0):

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'{}_0, \qquad \text{(problema do valor inicial)}. \tag{5}$$

As soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam uma **base** ou **sistema fundamental**. Em outras palavras: $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são **linearmente independentes**. Lembre que duas soluções são linearmente independentes se:

$$C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0. \tag{6}$$

Para verificar se as soluções da (3) são linearmente independentes devemos verificar se o determinante wronskiano W formado com as soluções e suas derivadas satisfaz à condição:

$$W(x) = \left\| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y'{}_1(x) & y'{}_2(x) \end{array} \right\| \neq 0,$$

para $x \in I$.
Para o problema do valor inicial, temos:

$$\begin{aligned} C_1\, y_1(x_0) + C_2\, y_2(x_0) &= y_0 \\ C_1\, y_1'(x_0) + C_2\, y_2'(x_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{7}$$

Os coeficientes C_1 e C_2 são determinados por meio de:

$$C_1 = \frac{\left\| \begin{array}{cc} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y'{}_2(x_0) \end{array} \right\|}{W(x_0)} \neq 0, \qquad C_2 = \frac{\left\| \begin{array}{cc} y_1(x_0) & y_0 \\ y'{}_1(x_0) & y_0' \end{array} \right\|}{W(x_0)} \neq 0. \tag{8}$$

A condição de independência linear nos leva a:

$$\begin{aligned} C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) &= 0, \\ C_1\, y_1'(x) + C_2\, y_2'(x) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

com $x \in I$, mas ainda arbitrário. Se $W \neq 0$ em x, a solução é trivial: $C_1 = C_2 = 0$, e y_1, y_2 são linearmente independentes. Para que uma solução não-trivial exista, é necessário que $W(x) = 0$ para $\forall x \in I$. Se $W = 0$ em I, podemos sempre encontrar C_1 e C_2 não-nulos e escrever:

$$y_(x) = -\frac{C_2}{C_1}\, y_2(x) \tag{10}$$

isto é, y_1 e y_2 são proporcionais. Portanto, o valor do wronskiano em I determina a independência linear ou não das soluções.

O teorema fundamental para EDO lineares homogêneas de segunda ordem

As EDO lineares de segundo grau homogêneas obedecem a um importante teorema:

Teorema Fundamental: qualquer combinação linear formada por duas soluções da Eq. (3) no intervalo aberto I é solução da Eq. (3) em I. Em particular, para a Eq. (3), somas de soluções ou múltiplos de soluções são soluções.

Mas atenção: se a EDO linear de segunda ordem for inomogênea ou não linear, o teorema acima não será válido.

EXERCÍCIO 1: Demonstre o teorema fundamental para EDO lineares homogêneas de segunda ordem.

EDO lineares de segundo grau homogêneas com coeficientes constantes

Vamos restringir nosso interesse às EDOs da forma:

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0, \tag{11}$$

onde agora $p(x) = a$ e $q(x) = b$ para $\forall x \in I$ são coeficientes constantes. Como solução tentativa tentemos uma função exponencial:

$$y(x) = \exp(\lambda\,x), \qquad y'(x) = \lambda\,y(x), \qquad y''(x) = \lambda^2\,y(x). \tag{12}$$

Substituindo na Eq. (11) obtemos a equação característica:

$$\left(\lambda^2 + a\,\lambda + b\right)\,y(x) = 0. \tag{13}$$

Segue que para $\forall x \in I$,

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0, \tag{14}$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4\,b}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4\,b}}{2}. \tag{15}$$

Temos três casos a considerar.

Duas raízes reais e distintas: $a^2 - 4\,b > 0$

Neste caso,

$$y(x) = C_1\,\exp\left(\lambda_1\,x\right) + C_2\,\exp\left(\lambda_2\,x\right). \tag{16}$$

Duas raízes complexas e distintas: $a^2 - 4\,b < 0$

Neste caso, $\sqrt{a^2 - 4\,b} \rightarrow \sqrt{-1}\,\sqrt{4\,b - a^2} = i\,\omega$, logo,

$$y(x) = \exp(-a\,x/2)\left[C_1 \exp\left(i\,\omega\,x\right) + C_2\,\exp\left(-\,i\,\omega\,x\right)\right]. \tag{17}$$

Raízes reais e iguais: $a^2 - 4\,b = 0$

Quando as raízes da equação característica são iguais obtemos somente uma solução:

$$y_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{2}\,x\right). \tag{18}$$

Para obter a segunda solução fazemos uso de um caso particular do *método da redução de ordem* que aqui consiste em escrever:

$$y_2(x) = u(x)\,y_1(x) = u(x)\,\exp\left(-\frac{a}{2}\,x\right). \tag{19}$$

As derivadas primeira e segunda são:

$$y'_2 = u'\,y_1 + u\,y'_1, \tag{20}$$

$$y_2'' = u''\,y_1 + 2u'\,y'_1 + u\,y''_1. \tag{21}$$

Substituindo na Eq. (11) obtemos:

$$u''\,y_1 + u'\,\left(2y'_1 + ay_1\right) + u\,\left(y''_1 + ay'_1 + by_1\right) = 0. \tag{22}$$

Ambos os parênteses são nulos. Para verificar isto observe que para um deles $y_1(x)$ é solução da Eq. (11), e para o outro basta usar a forma explícita de $y_1(x)$ e verificar que $2y_1 = -ay_1$. Ficamos então com:

$$u''\,y_1 = 0; \qquad \Rightarrow \qquad u'' = 0; \qquad \Rightarrow \qquad u(x) = c_1\,x + c_2. \tag{23}$$

É suficiente considerar $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, logo:

$$y_2(x) = x\,\exp\left(-\frac{a}{2}\,x\right), \tag{24}$$

e, consequentemente:

$$y(x) = \left(C_1 + C_2\,x\right)\,\exp\left(-\frac{a}{2}\,x\right). \tag{25}$$

Atenção: se λ for uma raíz simples, isto é: $b = 0$, então a solução acima não é solucão da Eq. (11).

Soluções em forma de série de potências

Considere a equação diferencial que descreve o O.H.S.:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2\,x(t) = 0. \tag{26}$$

Considere agora:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n. \tag{27}$$

Calculemos as derivadas:

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,t^{n-1}; \tag{28}$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,\left(n-1\right)\,a_n\,t^{n-2}. \tag{29}$$

Substituindo na EDO:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,\left(n-1\right)\,a_n\,t^{n-2} + \omega^2\,\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n = 0. \tag{30}$$

No primeiro somatório do L.D. desta equação fazemos a mudança: $n - 2 \rightarrow n'$, logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+2\right)\,\left(n+1\right)\,a_{n+2}\,t^n + \omega^2\,\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n = 0, \tag{31}$$

onde fizemos uso do fato que n' é um índice mudo para rescrever n para primeiro somatório. Agora, a equação acima pode ser rescrita como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n+2\right)\,\left(n+1\right)\,a_{n+2} + \omega^2\,a_n\right]\,t^n = 0, \tag{32}$$

logo,

$$(n+2)\ (n+1)\ a_{n+2} + \omega^2\, a_n = 0, \tag{33}$$

ou ainda

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)\ (n+1)}\, a_n. \tag{34}$$

Vejamos alguns valores dos coeficientes a_n:

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{(0+2)\ (0+1)}\, a_0 = -\frac{\omega^2}{2}\, a_0;$$

$$a_3 = -\frac{\omega^2}{(1+2)\ (1+1)}\, a_1 = -\frac{\omega^2}{3\cdot 2}\, a_1;$$

$$a_4 = -\frac{\omega^2}{(2+2)\ (2+1)}\, a_2 = -\frac{\omega^2}{4\cdot 3}\, a_2 = +\frac{\omega^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\, a_0;$$

$$a_5 = -\frac{\omega^2}{(3+2)\ (3+1)}\, a_3 = -\frac{\omega^2}{5\cdot 4}\, a_3 = +\frac{\omega^4}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\, a_1;$$

$$a_6 = -\frac{\omega^2}{(4+2)\ (4+1)}\, a_4 = -\frac{\omega^2}{6\cdot 5}\, a_4 = -\frac{\omega^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\, a_0;$$

$$a_7 = -\frac{\omega^2}{(5+2)\ (5+1)}\, a_5 = -\frac{\omega^2}{7\cdot 6}\, a_5 = -\frac{\omega^6}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\, a_1;$$

$$a_8 = -\frac{\omega^2}{(6+2)\ (6+1)}\, a_6 = -\frac{\omega^2}{8\cdot 7}\, a_6 = +\frac{\omega^8}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\, a_0;$$

$$a_9 = -\frac{\omega^2}{(7+2)\ (7+1)}\, a_7 = -\frac{\omega^2}{9\cdot 8}\, a_7 = +\frac{\omega^8}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\, a_1;$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Segue que

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 + \cdots. \tag{35}$$

Como o operador diferencial associado ao OHS é par em t:

$$\hat{D}(t) := \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 = \hat{D}(-t),$$

podemos esperar dus soluções linearmente independentes. Estas soluções podem ser escritas como duas séries, uma par e outra ímpar em $\omega\, t$. Uma série dependerá de a_0 e a outra dependerá de a_1.

$$x(t) = a_0\, \left(1 - \frac{\omega^2\, t^2}{2!} + \frac{\omega^4\, t^4}{4!} - \frac{\omega^6\, t^6}{6!} + \frac{\omega^8\, t^8}{8!} - \cdots\right) + \frac{a_1}{\omega}\, \left(\omega\, t - \frac{\omega^3\, t^3}{3!} + \frac{\omega^5\, t^5}{5!} - \frac{\omega^7\, t^7}{7!} + \cdots\right). \tag{36}$$

Reconhecendo as séries de Taylor para o seno e o cosseno de $\omega\, t$, temos finalmente:

$$x(t) = a_0\, \cos\, (\omega\, t) + \frac{a_1}{\omega}\, \mathrm{sen}\, (\omega\, t)\, , \tag{37}$$

ou ainda:

$$x(t) = C_1\, \cos\, (\omega\, t) + C_2 \mathrm{sen}\, (\omega\, t)\, . \tag{38}$$

Referências

[1] E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*. (Wiley: New York) 1993.

[2] G. E. H. Reuter: *A Elementary Differential Equations & Operators*. (Routledge & Kegan Paul: London) 1958.

[3] W. E. Boyce & R. C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* 6th ed. (Wileyl: New York) 1997.