Métodos Matemáticos 2012 –Notas de Aula

Equações Diferenciais Ordinárias II

A C Tort*

25 de setembro de 2012

1 O fator integrante

Suponha que a EDO de primeira ordem seja da forma:

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = g(x). \tag{1}$$

Multiplicando a EDO por $u(x)$:

$$u(x)\,y'(x) + u(x)\,p(x)\,y(x) = u(x)\,g(x). \tag{2}$$

Definindo:

$$u'(x) = u(x)\,p(x), \tag{3}$$

ficamos com:

$$u(x)\,y'(x) + u'(x)\,y(x) = u(x)\,g(x), \tag{4}$$

ou ainda:

$$d\,[u(x)\,y(x)] = u(x)\,g(x). \tag{5}$$

Portanto,

$$u(x)\,y(x) = \int u(x)\,g(x)\,dx + C, \tag{6}$$

onde C é uma constante de integraçnao que deve ser determinada com uma condição adicional sobre $y(x)$. Segue que:

$$y(x) = \frac{\int u(x)\,g(x)\,dx + C}{u(x)}. \tag{7}$$

Para obter o fator integrante $u(x)$ voltamos à Eq. (3) :

$$\frac{d\,u(x)}{dx} = u(x)\,p(x). \tag{8}$$

Usando o método de separação de variáveis rescrevemos esta equação na forma:

$$\frac{d\,u}{u} = p(x)\,dx. \tag{9}$$

Integrando obtemos:

*email: tort@ufrj.br

$$\ln\, u = \int p(x)\, dx + K, \tag{10}$$

ou ainda fazendo $K = 0$ e invertendo:

$$u(x) = \exp\left(\int\, p(x)\, dx\right). \tag{11}$$

Exemplo 1 *A lei de resfriamento de Newton* Seja T a temperatura do meio ambiente e $\theta(t)$ a temperatura de um corpo imerso nesse meio. A lei do resfriamento de Newton nos diz que:

$$\frac{d\,\theta}{dt} = -\kappa\,(\theta - T)\,, \tag{12}$$

onde κ é uma constante, a constante de resfriamento, que depende de condições específicas ao meio e ao corpo. Para obter uma solução geral desta equação com o método do fator integrante escrevemos:

$$\frac{d\,\theta}{dt} + \kappa\,\theta = \kappa\,T, \tag{13}$$

e fazemos as identificações: $p(t) = \kappa$ e $g(t) = \kappa T$. Segue que:

$$u(t) = \exp\int \kappa\, dt = \exp\,(\kappa\, t), \tag{14}$$

e, logo,

$$\theta(t) = \frac{\int \exp\,(\kappa\, t)\;\kappa T\, dt + C}{\exp\,(\kappa\, t)} = \frac{\kappa T\;\exp(\kappa\, t)/\kappa + C}{\exp\,(\kappa\, t)} = T + C\,\exp\,(-\kappa\, t)\,. \tag{15}$$

Para determinar C deve-se conhecer a temperatura do corpo em um determinado instante t_0 (problema do valor inicial) $\theta(t_0) = \theta_0$.

EXERCÍCIO 1: Mostre que se $\theta(t_0) = \theta_0$, a temperatura do corpo varia de acordo com:

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)\;\exp\,[-\kappa\,(t - t_0)]\,. \tag{16}$$

EXERCÍCIO 2: A que mecanismo de transmissão de calor a lei de resfriamento de Newton está associada?

Exemplo 2 *CSI - Rio* Suponha que um cadáver seja encontrado em condições suspeitas no instante $t_0 = 0$. A temperatura do corpo é medida imediatamente pelo perito e o valor obtido é $\theta_0 = 29\,^{\text{o}}$C. O corpo é retirado da cena do suposto crime e duas horas depois sua temperatura é novamente medida e o valor encontrado é $\theta_1 = 23\,^{\text{o}}$ C. O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã bem cedo. A perícia então faz a suposição adicional de que a temperarura do meio ambiente entre a hora da morte t_m e a hora em que o cadáver foi encontrado t_0 tenha se mantido mais ou menos constante $T \approx 20\,^{\text{o}}$ C. A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de $37\,^{\text{o}}$ C. Com esses dados como a perícia pode determinar a hora do crime?

Solução O primeiro passo é reunir os dados. Temos $t_0 = 0$ (por simplicidade), $\theta_0 = 29\,^{\text{o}}$ C ; $t_1 = 2\,$h, $\theta_1 = 23\,^{\text{o}}$ C; $T = 20\,^{\text{o}}$ C. O segundo passo é determinar a constante de resfriamento κ para este caso com a solução (16):

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)\;\exp\,(-\kappa\, t_1)\,. \tag{17}$$

Aplicando logarítmos e substituindo valores:

$$\kappa = -\frac{1}{t_1}\,\ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right) = -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{23 - 20}{29 - 20}\right) = -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.55\,\text{h}^{-1}. \tag{18}$$

Agora usamos uma vez mais a solução (16) para estimar a hora da morte t_m:

$$\theta_m = T + (\theta_0 - T)\,\exp\left(-0.55\,t_m\right). \tag{19}$$

Procedendo como no cálculo de κ:

$$t_m = -\frac{1}{\kappa}\,\ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) = -\frac{1}{0.55}\,\ln\left(\frac{37-20}{29-20}\right) = -\frac{1}{0.55}\,\ln\left(\frac{17}{9}\right) \approx -1.16\,\mathrm{h}. \tag{20}$$

Portanto, o crime ocorreu há um pouco mais de uma hora antes do corpo ser descoberto.

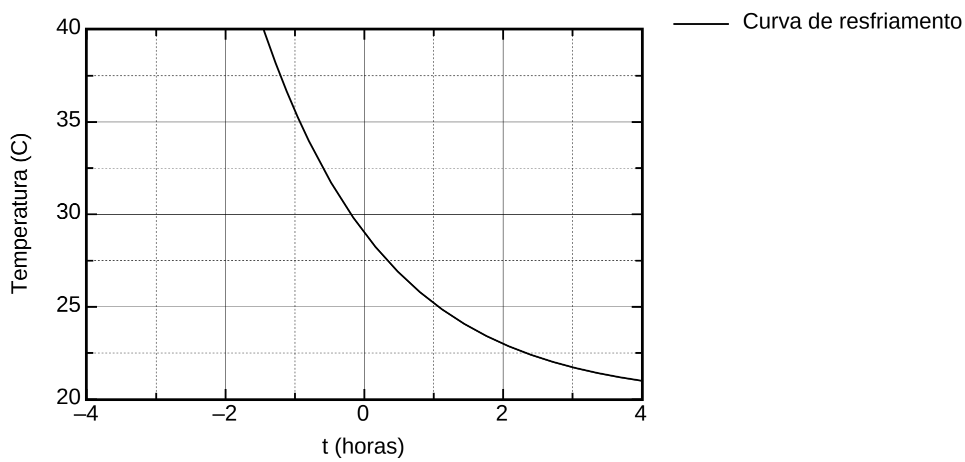

Figura 1: Curva de resfriamento.

EXERCÍCIO 3: Quais são os pontos fracos desta técnica pericial?

Diferenciais exatas

Dada uma função de duas variáveis $u(x,y)$ sua diferencial total ou exata se escreve:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy. \tag{21}$$

Suponha agora que $u(x,y) = C$, onde C é uma constante. Então:

$$du(x,y) = 0. \tag{22}$$

Exemplo 3 Considere:

$$u = x + x^2y^3 = C. \tag{23}$$

A diferencial exata desta função é

$$du = \left(1 + 2xy^3\right)\,dx + 3x^2y^2dy = 0. \tag{24}$$

Segue que:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\left(1+2xy^3\right)}{3x^2y^2}. \tag{25}$$

Isto siginifca que se nos fosse dada esta última EDO, poderíamos manipulá-la algebricamente colocando-a na forma de uma diferencial exata e depois integrá-la.

Resumindo: uma EDO de primeira ordem da forma:

$$M\,(x,y)\;dx + N\,(x,y)\;dy = 0, \tag{26}$$

é dita ser **exata** se o L.E. desta equação diferencial for uma diferencial total ou exata de uma função $u(x,y)$, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M\,(x,y)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N\,(x,y)\ . \tag{27}$$

Neste caso, $u(x,y) = C$ é a solução implícita da EDO. Por outro lado, é possível provar que a condição necessaria e suficiente para que a Eq. (26) seja uma diferencial exata é que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{28}$$

Exemplo 4 *Resolvendo uma equação diferencial exata* Considere

$$\left(x^3 + 3xy^2\right)\,dx + \left(3x^2y + y^3\right)\,dy = 0. \tag{29}$$

Começamos fazendo o teste de exatidão:

$$M(x,y) = x^3 + 3xy^2, \qquad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 6xy, \tag{30}$$

$$N(x,y) = 3x^2y + y^3, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 6xy, \tag{31}$$

logo, a ED é exata. Podemos escrever:

$$u = \int M(x,y)\,dx + K(y) = \int \left(x^3 + 3xy^2\right)\,dx + K(y).,\tag{32}$$

ou ainda:

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + K(y). \tag{33}$$

Para determinar $K(y)$ escrevemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N, \tag{34}$$

ou

$$3x^2y + \frac{dK\,(y)}{dy} = 3x^2y + y^3. \tag{35}$$

Segue que:

$$\frac{dK\,(y)}{dy} = y^3, \qquad K(y) = \frac{y^4}{4} + C. \tag{36}$$

Portanto, a solução é

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\,\left(x^4 + 6x^2y^2 + y^4\right) = C'. \tag{37}$$

Exemplo 5 *Um contra-exemplo* Considere:

$$y\,dx - x\,dy = 0. \tag{38}$$

Agora $M(x, y) = y$ e $N(x, y) = -x$. Segue que $M_x(x, y) = 1$ e $N_y(x, y) = -1$. Portanto a equação diferencial acima não é exata, o que não significa que não possa ser resolvida, mas o método que usamos acima falha. Para verificar esta afirmativa procedamos como no **Exemplo 4**:

$$u = \int M(x, y)\,dx + K(y) = yx + K(y). \tag{39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x + \frac{dK\,(y)}{dy}. \tag{40}$$

Mas $N(x, y) = -x$, logo:

$$x + \frac{dK\,(y)}{dy} = -x \tag{41}$$

ou ainda:

$$\frac{dK\,(y)}{dy} = -2x, \tag{42}$$

que é uma contradição já que K e dK/dy dependem somente de y.

EXERCÍCIO 4: Resolva a EDO:

$$y\,dx - x\,dy = 0, \tag{43}$$

pelo método de separação de variáveis. **Resposta**: $y = Cx$.

Referências

[1] E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*. (Wileyl: New York) 1993.

[2] G. E. H. Reuter: *A Elementary Differential Equations* & *Operators*. (Routledge & Kegan Paul: London) 1958.

[3] W. E. Boyce & R. C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* 6th ed. (Wileyl: New York) 1997.