Mecânica Quântica

O processo de medida em MQ

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

17 de Maio de 2012

O operador $\mathbf{S}^2$

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

ou (exercício!):

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que:

$$\frac{3\hbar}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou seja:

$$\mathbf{S}^2 \left|\pm\right\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} \left|\pm\right\rangle$$

Observe também que:

$$S_z \left|\pm\right\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} \left|\pm\right\rangle$$

Os kets $\left|\pm\right\rangle$ são simultaneamente autokets de $\mathbf{S}^2$ e S_z!

E mais:

$$S_z\, \mathbf{S}^2 \left|\pm\right\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} S_z \left|\pm\right\rangle = \pm\frac{3\hbar^3}{8} \left|\pm\right\rangle$$

$$\mathbf{S}^2 S_z \left|\pm\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \mathbf{S}^2 \left|\pm\right\rangle = \pm\frac{3\hbar^3}{8} \left|\pm\right\rangle$$

O comutador $[\mathbf{S}^2, S_z]$

os operadores $\mathbf{S}^2$ e S_z comutam:

$$\mathbf{S}^2\, S_z = S_z\, \mathbf{S}^2$$

O comutador é definido por:

$$\left[\mathbf{S}^2, S_z\right] = \mathbf{S}^2\, S_z - S_z\, \mathbf{S}^2$$

No caso:

$$\left[\mathbf{S}^2, S_z\right] = 0$$

$\boxed{\mathbf{S}^2 \text{ e } S_z \text{ podem ser medidos simultaneamente!}}$

Da mesma forma:

$$\left[\mathbf{S}^2, S_x\right] = \mathbf{S}^2 S_x - S_x \mathbf{S}^2 = 0$$

e

$$\left[\mathbf{S}^2, S_y\right] = \mathbf{S}^2 S_y - S_y \mathbf{S}^2 = 0$$

Mas (exercício!):

$$[S_x, S_y] = S_x S_y - S_y S_x = i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_z] = S_y S_z - S_z S_y = i\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x] = S_z S_x - S_x S_z = i\hbar S_y$$

significando que

Estes observáveis não podem ser medidos simultaneamente!

O processo de medida em MQ: projetores

$$P_{1/2} = |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|$$

ou

$$P_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou ainda:

$$P_{1/2} = I_{1/2}$$

Se

$$|\psi\rangle = c_1 |+\rangle + c_2 |-\rangle$$

então:

$$P_{1/2} |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Como

$$P_{1/2\,+} = |+\rangle\,\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$P_{1/2\,-} = |-\rangle\,\langle-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos

$$P_{1/2+}\,|\psi\rangle = c_1\,|+\rangle$$

e

$$P_{1/2-}\,|\psi\rangle = c_2\,|-\rangle$$

Interpretação geométrica:

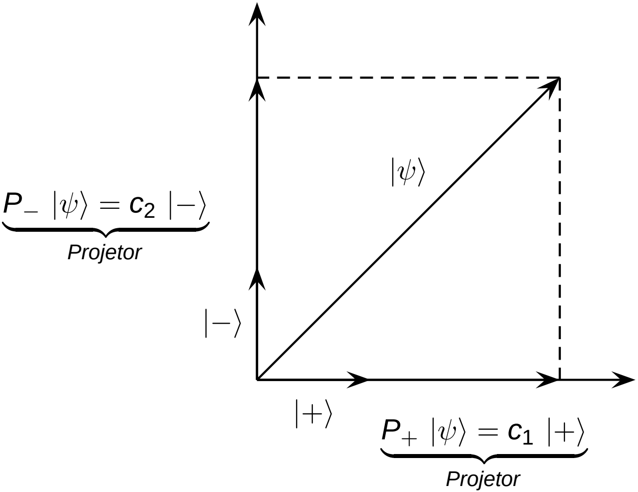


Figura: O espaço vetorial linear dos estados de spin..

Completicidade!

$$\boxed{\sum_n |a_n\rangle \langle a_n| = I}$$

O processo de medida em MQ: redução do estado

<u>Postulado 5</u> Depois de uma medida do observável A na qual obtemos o autovalor a_n como resultado, o sistema está em um novo estado quântico que é a projeção normalizada do ket de estado inicial sobre o ket que corresponde ao resultado dessa medida:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_n |\psi\rangle}}$$

onde $|\psi'\rangle$ é o ket de estado após a medida e,

$$P_n = |a_n\rangle \langle a_n|$$

é o projetor do estado inicial no estado final.

Detalhes:

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=0} c_\ell \; |a_\ell\rangle$$

$$P_n \; |\psi\rangle = P_n \; \sum_{\ell=0} c_\ell \; |a_\ell\rangle = \sum_{\ell=0} c_\ell P_n \; |a_\ell\rangle$$

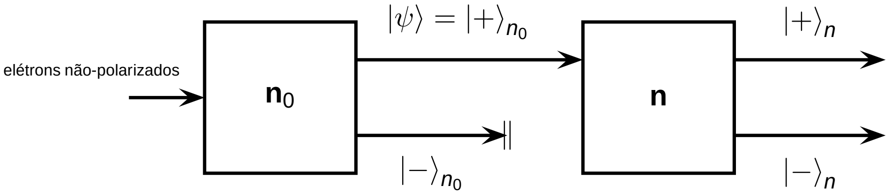
$$\sum_{\ell=0} c_\ell P_n \; |a_\ell\rangle = \sum_{\ell=0} c_\ell \; |a_n\rangle \langle a_n| \; a_\ell\rangle = \sum_{\ell=0} c_\ell \; |a_n\rangle \, \delta_{\ell n} = c_n \; |a_n\rangle$$

$$\langle\psi| \, P_n \, |\psi\rangle = \langle\psi| \, c_n \, |a_n\rangle = c_n \; \langle\psi \mid a_n\rangle = c_n \, \langle a_n \mid \psi\rangle^* = c_n {c_n}^* = |c_n|^2$$

$$|\psi'\rangle = \frac{c_n \; |a_n\rangle}{\sqrt{|c_n|^2}} \; \rightarrow \; \langle\psi' \mid \psi\rangle = \frac{\langle a_n| \, {c_n}^*}{|c_n|} \, \frac{c_n \; |a_n\rangle}{|c_n|} = 1$$

O processo de medida em MQ: o valor esperado

Considere N elétrons preparados no mesmo estado inicial $|\psi\rangle$ por um S-G e injetados um por um em um segundo S-G.



$$P_+ = \frac{N_+}{N}, \qquad P_- = \frac{N_-}{N}, \qquad N = N_+ + N_-$$

Postulado 4:

$$P_{+n} = |{}_n\langle + \mid \psi\rangle|^2$$

ou

$$P_{+n} = {}_n\langle + \mid \psi\rangle \; {}_n\langle + \mid \psi\rangle^* = {}_n\langle + \mid \psi\rangle \langle \psi \mid +\rangle_n$$

Da mesma forma:

$$P_{-n} = {}_n\langle - \mid \psi\rangle \; {}_n\langle - \mid \psi\rangle^* = {}_n\langle - \mid \psi\rangle \langle \psi \mid -\rangle_n$$

o valor esperado é definido por:

$$\langle S_n\rangle = \frac{\hbar}{2} P_{+n} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) P_{-n}$$

$$\langle S_n \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \psi \mid + \rangle_{n\,n} \langle + \mid \psi \rangle + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \langle \psi \mid - \rangle_{nn} \langle - \mid \psi \rangle$$

Lembrando que:

$$|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| = 1$$

obtemos finalmente:

$$\langle S_n \rangle = \langle \psi | S_n | \psi \rangle$$

De modo geral, se A é um operador associado com um observável físico, seu valor esperado no estado $|\psi\rangle$ é dado por:

$$\boxed{\langle A \rangle := \langle \psi | A | \psi \rangle}$$

Exemplo:

$$|\psi\rangle = |+\rangle_n = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}|-\rangle$$

lembrando que:

$$S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi} \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

obtemos:

$$\langle S_n\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

O que acontece se $\theta = 0$?

Desigualdades de Heisenberg

Algumas definições:

$$(\Delta A)^2 = \langle A - \langle A \rangle \rangle^2$$

$$\Delta A = \sqrt{\left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2}$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\boxed{\Delta A \, \Delta B = \frac{1}{2} \, |\langle [A, B] \rangle|}$$

Exemplo

$$\Delta S_x \, \Delta S_y = \frac{1}{2} \left| \langle [S_x, S_y] \rangle \right| = \frac{1}{2} \left| \langle i\hbar \, S_z \rangle \right| = \frac{\hbar}{2} \left| \langle S_z \rangle \right|$$

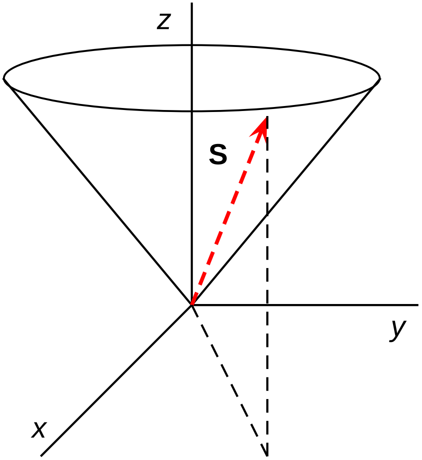
$$\langle S_z \rangle = \langle \psi | \, S_z \, | \psi \rangle$$

Suponha que $|\psi\rangle = |+\rangle$, então:

$$\langle S_z \rangle = \langle + | \, S_z \, | + \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta S_x \, \Delta S_y \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \Delta S_x \neq 0, \;\; \Delta S_y \neq 0$$

Modelo vetorial para o spin



Momento angular em MQ

De modo geral, se $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$:

$$\mathbf{J}^2 \left| j\, m_j \right\rangle = j\,(j+1)\,\hbar^2 \, \left| j\, m_j \right\rangle$$

$$J_z \, \left| j\, m_j \right\rangle = m_j\, \hbar \, \left| j\, m_j \right\rangle$$

com $j \in [|\ell - s|...\ell + s]$ e $m_j \in [-j... + j]$.

No caso do spin ($|\pm\rangle \rightarrow |s\, m_s\rangle$):

$$\mathbf{S}^2 \, |s\, m_s\rangle = s\,(s+1)\,\hbar^2 \, |s\, m_s\rangle$$

$$S_z \, |s\, m_s\rangle = m_s\, \hbar \, |s\, m_s\rangle$$

com $s = 1/2$, e $m_s = -1/2, +1/2$,

$$\left| \frac{1}{2}\, \frac{1}{2} \right\rangle \qquad \left| \frac{1}{2}\, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$\boxed{\text{FIM DA AULA 7}}$

Próxima aula:

$\boxed{\text{Dinâmica quântica}}$