Mecânica Quântica

Spin $1/2$ e a formulação da M. Q. Parte I

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

3 de Maio de 2012

O postulado fundamental da M.Q.

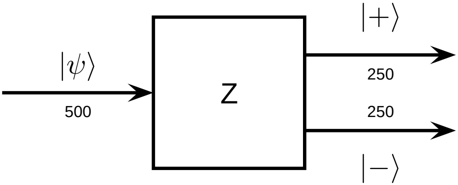
Postulado. O estado de um sistema quântico é matematicamente representado por um ket de estado normalizado $|\psi\rangle$.

O ket/vetor de estado $|\psi\rangle$ representa o resultado da última medida feito sobre o sistema!!!

Por exemplo, se vc mediu a energia do átomo de H e o resultado foi $-13,6\,\mathrm{eV}$, então $|\psi\rangle = |E = -13.6\,\mathrm{eV}\rangle$

Experimentos com analizadores e filtros de SG

Experimento zero:



Superposição:

$$|\psi\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$$

Base ortonormal:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O ket dual (bra):

$$\langle\psi| = a^* \langle+| + b^* \langle-|$$

$$\langle+| = (1\ 0) \qquad \langle-| = (0\ 1)$$

Propriedades da base:

$$\langle + \mid + \rangle = \langle - \mid - \rangle = 1$$
$$\langle + \mid - \rangle = \langle - \mid + \rangle = 0$$

Segue que:

$$a = \langle + \mid \psi \rangle \qquad b = \langle - \mid \psi \rangle$$

Exercício: você pode mostrar que:

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \langle \psi \mid \varphi \rangle^*$$

Produto escalar:

$$|\psi\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$$

$$|\varphi\rangle = c\,|+\rangle + d\,|-\rangle$$

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = c^* a + d^* b$$

Normalização: se $|\varphi\rangle = |\psi\rangle$,

$$\langle \psi \mid \psi \rangle = a^* a + b^* b = |a|^2 + |b|^2$$

Para normalizar à unidade escrevemos:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}\,\left[a\,|+\rangle + b\,|-\rangle\right]$$

<u>Postulado</u> (sugerido pelo experimento de S-G):

$$P_{+\frac{\hbar}{2}} = \|\langle + \mid \psi \rangle\|^2$$

$$P_{-\frac{\hbar}{2}} = \|\langle - \mid \psi \rangle\|^2$$

Como:

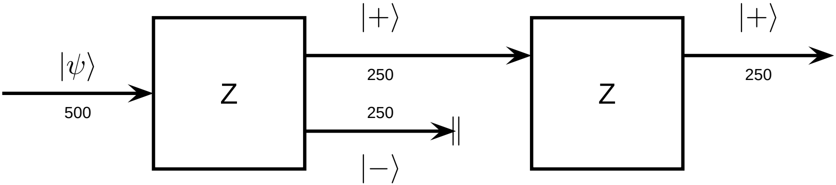
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle + |-\rangle \right]$$

temos para o eixo de quantização Z:

$$P_{+\frac{\hbar}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{-\frac{\hbar}{2}} = \frac{1}{2}$$

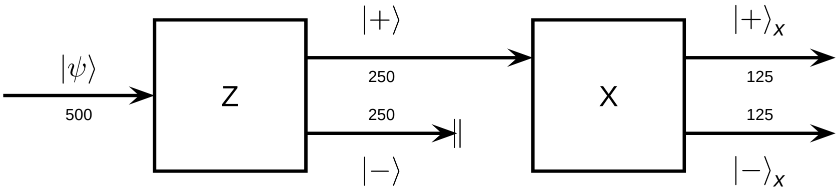
Experimento 1a



Para o segundo S-G:

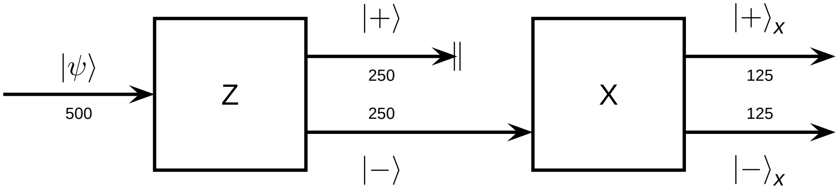
$$P_{+\frac{\hbar}{2}} = \|\langle + \mid + \rangle\|^2 = 1 \qquad P_{-\frac{\hbar}{2}} = \|\langle - \mid + \rangle\|^2 = 0$$

Experimento 2a



$$P_{1,+x} = \|{}_x\langle + \mid + \rangle\|^2 = \frac{1}{2} \qquad P_{1,-x} = \|{}_x\langle - \mid + \rangle\|^2 = \frac{1}{2}$$

Experimento 2b



$$P_{2,+x} = \|_x\langle + \mid - \rangle\|^2 = \frac{1}{2} \qquad P_{2,-x} = \|_x\langle - \mid - \rangle\|^2 = \frac{1}{2}$$

Determinação dos kets $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$

$$|+\rangle_x = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$$

$$|-\rangle_x = c\,|+\rangle + d\,|-\rangle$$

Dos experimentos 2a e 2b:

$$P_{1,+x} = \|_x\langle + \mid + \rangle\|^2 = \|(a^*\langle +| + b^*\langle -|)\;|+\rangle\|^2 = \|a^*\|^2 = \|a\|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{1,-x} = \|_x\langle - \mid + \rangle\|^2 = \|(c^*\langle +| + d^*\langle -|)\;|+\rangle\|^2 = \|c^*\|^2 = \|c\|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{2,+x} = \|_x\langle + \mid - \rangle\|^2 = \|(a^*\langle +| + b^*\langle -|)\;|-\rangle\|^2 = \|b^*\|^2 = \|b\|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{2,-x} = \|_x\langle - \mid - \rangle\|^2 = \|(c^*\langle +| + d^*\langle -|)\;|-\rangle\|^2 = \|d^*\|^2 = \|d\|^2 = \frac{1}{2}$$

Segue que:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\alpha}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\beta}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}},\, e^{i\gamma} \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\delta}$$

Como no caso dos estados de polarização da luz, o importante é a fase relativa entre os coeficientes complexos, logo fazemos $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$, e ficamos com:

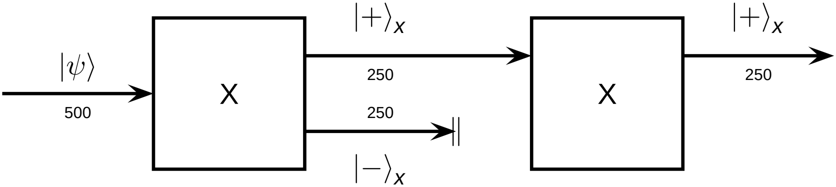
$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle + e^{i\beta} \, |-\rangle \right]$$

e

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle + e^{i\delta} \, |-\rangle \right]$$

Experimento 1b

Para determinar as fases restantes recorremos ao experimento 1a, mas modificado:



Para o segundo S-G:

$$P_{+\frac{\hbar}{2}} = \|_x \langle + \mid + \rangle_x \|^2 = 1 \qquad P_{-\frac{\hbar}{2}} = \|_x \langle - \mid + \rangle_x \|^2 = 0$$

$$P_{-\frac{\hbar}{2}} = \|{}_x\langle - \mid + \rangle_x\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad {}_x\langle - \mid + \rangle_x = 0$$

Segue que:

$$\frac{1}{2}\left[1 + e^{i(\beta-\delta)}\right] = 0$$

ou

$$e^{i(\beta-\delta)} = -1$$

ou ainda:

$$e^{i\beta} = -e^{i\delta}$$

Seguindo a convenção, fazemos $\beta = 0$ e $\delta = \pi$ e obtemos finalmente:

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right]$$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - |-\rangle\right]$$

Determinação dos kets $|+\rangle_y$ e $|-\rangle_y$

O processo é similar ao da determinação dos kets $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$.

O resultado é:

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + i\,|-\rangle\right]$$

e

$$|-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - i\,|-\rangle\right]$$

Fim da primeira parte.