

# A precessão do Periélio de Mercúrio e a Teoria da Relatividade Geral

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Mestrado em Ensino de física  
Disciplina: Tópicos de física contemporânea  
Prof. Alexandre Carlos Tort  
Aluno: Paulo Victor Santos Souza

10/07/2010

## 1 Preâmbulo

O Homem se interessa no *cosmos* desde a Antiguidade. Os registros astronômicos mais antigos nos remetem aos chineses, babilônicos, assírios e egípcios que viveram aproximadamente 3000 anos antes de Cristo. Na Grécia, entre 600 a.e.c. e 400 e.c, a ciência antiga alcançou seu ápice. Nasceram neste berço os primeiros conceitos de Esfera Celeste que, segundo os Gregos, tratava-se de uma esfera de material cristalino que girava em torno de um eixo passando pela Terra. Entretanto, uma contribuição nos é, em especial, interessante: Por volta de 150 a.e.c., o astrônomo grego Hiparco de Nicéia comparou observações próprias de determinadas estrelas com observações realizadas por Timocharis de Alexandria e Aristyllus de Alexandria 150 anos antes e notou uma pequena, mas perceptível diferença nas longitudes das estrelas. Naturalmente, todas as estrelas eram referenciadas na, por hipótese, estacionária direção fixa da linha de intersecção entre os planos rotacional e orbital da Terra. Todavia, Hiparco foi levado à conclusão de que esta direção não é perfeitamente estacionária. De fato, a direção do Sol nos equinócios não é constante em relação às estrelas fixas, mas tem um precessão de aproximadamente 0,0127 graus por ano, conforme obtido por Hiparco. Como assim?

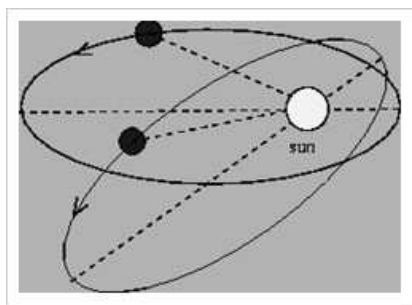


Figura 1 - A precessão da órbita elíptica

O plano orbital da Terra em torno do Sol é essencialmente constante. Os planos orbital e equatorial da Terra são defasados  $23.5^\circ$ , tal que se cruzam ao longo de uma única linha cuja direção permanece constante, supondo que os próprios planos mantenham cotas fixas. Nos equinócios de primavera e outono, o Sol se localiza precisamente nesta linha fixa em direções opostas da Terra. Como esta linha é estável, é utilizada como referência direcional para especificar as posições de objetos celestes e, por convenção, a longitude de objetos celestes toma como referência a direção desta linha apontando ao equinócio de primavera como é destacado em [1, 2].

Notavelmente, a previsão de Hiparco é muito boa quando comparada com o valor aceito hoje para a precessão dos equinócios que é de  $0,01396$  graus por ano. Entretanto, a previsão teórica e as observações não concordam quando estudamos a órbita do planeta Mercúrio. Em relação a nossa linha de equinócio, a previsão é de que a precessão aparente de Mercúrio fosse de aproximadamente 5025 segundos de arco por século, assumindo que o eixo da órbita é estacionário. Todavia, os dados experimentais revelaram uma taxa de precessão de 5600 segundos de arco por século. Se levarmos em conta a atração gravitacional de outros planetas, contudo, é possível determinar que os efeitos que estes produzem na órbita de Mercúrio é da ordem de 532 segundos de arco adicionais por século. Restam-nos ainda 43 pequenos e incomodos segundos de arco por século que a Mecânica Newtoniana não fora capaz de justificar. Este, um problema que já pode ser considerado antigo, foi tratado inicialmente, pelo matemático francês Urbain Le Verrier que, em 1860, percebeu o problema da precessão e sugeriu que poderia ser resolvido se fosse considerada a existência de um planeta movendo-se entre Mercúrio e o Sol; este chamaria-se Vulcano.

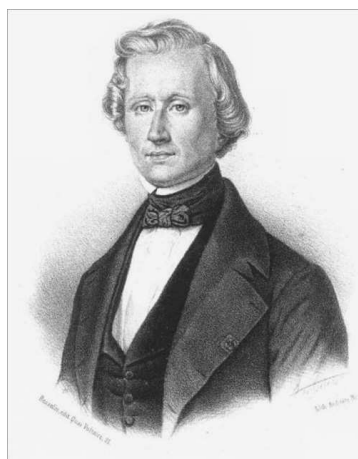


Figura 2 - Urbain Le Verrier

Posteriormente, sugeriu-se que ao invés da força ser proporcional ao inverso do quadrado da distância, o expoente fosse  $2,00000016$ . Esta alternativa, entretanto, foi abandonada por apresentar problemas à luz da Lei de Gauss. Como destaca [3], muitas outras alternativas foram propostas. No entanto, em nosso trabalho optamos pela solução tradicional, obtida através da teoria da relatividade geral de Einstein por a considerarmos mais consistente e natural. Acerca desta solução, Abraham Pais, físico e biógrafo de Einstein, em “Sutil é o Senhor” [4] destaca a importância desta descoberta para Einstein. Em suas palavras: “esta descoberta foi, eu acredito, a experiência emocional mais forte da vida científica de Einstein, talvez de toda a sua vida. A natureza tinha falado com ele”.

Concordemente, apresentamos a previsão Newtoniana, começando pelo modelo clássico em que não se admite precessão, o chamado problema de Kepler. Em seguida, abordamos o problema de Kepler de perturbado, ou seja, resolvemos o problema de Kepler considerando pequenas perturbações do sistema advindas da assimetria do sistema e da influência de outros planetas. O problema perturbado será estudado via conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz. Por fim, apresentamos a solução relativística através do estudo do movimento geodésico do planeta na métrica de Schwarzschild.

Salientamos que não é nossa intenção, em nenhuma hipótese, propor algo novo acerca da precessão do periélio de Mercúrio. Antes, revisamos contribuições que consideramos significativas para o tema, as estudamos e arranjamos de um modo que, esperamos, apresente-se harmonioso e interessante ao leitor.

## 2 A previsão Newtoniana

Esta seção é devotada ao estudo da previsão clássica do avanço do periélio. Começaremos considerando o problema de Kepler onde obteremos, através da mecânica analítica, a equação da órbita de uma partícula sob ação de uma força central. Subseqüentemente, analisaremos o problema de Kepler perturbado via conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz, que nos permite calcular a influência dos outros planetas na precessão do periélio de Mercúrio.

### 2.1 O problema de Kepler

Consideremos um planeta movimentando-se sob a ação de uma força central. Em coordenadas esféricas, a lagrangeana do sistema formado pelo planeta e pelo Sol que podem, sem perda de generalidade, ser tratados como partículas, é

$$L = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] + \frac{GMm}{r}. \quad (1)$$

Imediatamente, as equações de Euler-Lagrange oferecem, para cada uma das coordenadas

$$mr \left[ \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] - \frac{GMm}{r^2} = \frac{d}{dt}(mr\dot{r}) = m\ddot{r}; \quad (2)$$

$$mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}); \quad (3)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}). \quad (4)$$

Entretanto, as equações anteriores permanecem invariantes se  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ . Então, para um problema de valor inicial com  $\theta(0) = \pi/2$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$ , qualquer solução com  $(r(t), \theta(t), \phi(t))$  imediatamente oferece-nos uma outra solução  $(r(t), \pi - \theta(t), \phi(t))$ , o que contraria o teorema da unicidade da solução do problema do valor inicial. Como qualquer problema de valor inicial pode ser reduzido a esta situação, assumiremos que  $\theta \equiv \pi/2$ . Neste caso, as equações de Euler-Lagrange ganham a forma simplificada

$$mr\dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r^2} = m\ddot{r} \quad (5)$$

e

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0. \quad (6)$$

Analisemos as expressões anteriores. De (6), obtemos que  $L = mr^2\dot{\phi}$  é constante. Se  $L$  é nulo, teremos  $-GMm/r^2 = \ddot{r} < 0$  e então, para algum instante do tempo,  $r = 0$ , o que corresponde a situação em que o planeta espira-la reduzindo o raio até chocar-se com o Sol. Logicamente, podemos nos restringir a situações em que  $L \neq 0$ . Em termos de  $L = mr^2\dot{\phi}$ , (5) ganha a forma

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{ef}(r)}{dr}, \quad (7)$$

em que

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r^2}. \quad (8)$$

Assim, nosso problema de uma partícula movendo-se sob a ação de um força central foi reduzido a um simples problema unidimensional com um potencial modificado. Deveras, se desejarmos saber como  $\phi(t)$  varia, resolvemos (7), obtemos  $\ddot{r}$ , em seguida,  $r(t)$ . Por fim, usamos o fato de  $L = mr^2\dot{\phi}$  para obter  $\phi(t)$ . O método descrito acima permiti-nos determinar como as coordenadas da partícula no tempo. No entanto, mui freqüentemente, procuramos a equação da órbita, ou seja, procuramos  $r(\phi)$ . Com este intuito, pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi}. \quad (9)$$

Ademais, introduzindo a variável  $u = r^{-1}$  temos que

$$\dot{r} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L}{m} \frac{dr^{-1}}{d\phi} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\phi} \quad (10)$$

e

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \left( -\frac{L}{m} \frac{du}{d\phi} \right) = -\frac{L^2}{r^2} u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2}. \quad (11)$$

Assim, podemos re-escrever (7)

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{f(r)}{m}, \quad (12)$$

em que  $f(r) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{GMm}{r^2} \right)$  e usar as expressões obtidas acima para obter em função de  $u$  que

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} f \left( \frac{1}{u} \right), \quad (13)$$

em que dividimos ambos os membros por  $u^2$ . De fato, uma vez calculada a força que atua sobre partícula, (13) é a **equação diferencial da órbita da partícula**. Em nosso caso, como  $f(r) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{GMm}{r^2} \right)$ , (13) reduz-se a

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{mk}{L^2}, \quad (14)$$

em que  $k = GMm$ . (14) é uma equação diferencial de segunda ordem heterogênea cuja solução é

$$\frac{1}{r} = u = \frac{mk}{L^2} + \epsilon \cos \phi - \phi_0, \quad (15)$$

em que

$$\epsilon = \left[ 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \right]^2 \quad (16)$$

é uma constante que determina a forma da órbita e é obtida a partir de um estudo dos possíveis pontos de retorno da órbita. Se  $\epsilon = 0$ , a órbita é circular; se  $0 < \epsilon < 1$ , a órbita é elíptica; se  $\epsilon = 1$ , a órbita é parabólica e se  $\epsilon > 1$ , a órbita é hiperbólica. Além disso,  $\phi_0$  determina a orientação. No caso de Mercúrio, assim como os demais planetas do sistema solar, a órbita é elíptica com o Sol ocupando um dos focos. Esta última afirmativa constitui-se a *1ª Lei de Kepler*, obtida por Johannes Kepler através de dados observacionais de Tycho Brahe, que o antecedeu como astrônomo do imperador em Praga. Após seis anos estudando a órbita de Marte, Kepler obteve que “*Os planetas se movem em elipses tendo o Sol como um dos focos*”. Todavia, o estudo que apresentamos acima não admite a precessão de órbitas, ou seja, se desenvolve ancorado na suposição de que o movimento ocorre sempre no mesmo plano, o que não condiz com os dados experimentais. Na seção seguinte apresentaremos, ainda no ambiente da mecânica clássica, um método de estudo para o problema de Kepler perturbado, ou seja, o problema da órbita de um planeta sob ação de força central modificada por uma perturbação.

## 2.2 O problema de Kepler perturbado por meio do vetor de Laplace-Runge-Lenz

A dedução que realizamos acima, naturalmente, corresponde a uma situação idealizada em que desconsideramos uma série de fatores que podem interferir na órbita do planeta, em particular, na sua precessão. Entre estes podemos destacar a assimetria do campo gravitacional solar (a simetria esférica é apenas uma idealização), a pressão radiativa do Sol, o fluxo de partículas devido a o vento solar, o atrito e atração gravitacional de outros planetas. No estudo que conduziremos a seguir, consideraremos pequenas perturbações que implicaram numa variação temporal de uma constante do problema de Kepler. Naturalmente, supomos que o leitor esteja familiarizado com o vetor de Laplace-Runge-Lenz

$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}, \quad (17)$$

em que  $\hat{\mathbf{r}}$  é o unitário na direção radial e  $k = GMm$ , da forma como este é, em geral, apresentado em textos de mecânica clássica da graduação [5]. Ademais, é possível provar que

$$\frac{A^2}{m^2k^2} = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2} \quad (18)$$

e que

$$r = \frac{\ell^2/mk}{1 + \frac{|\mathbf{A}|}{mk} \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (19)$$

em que  $|\mathbf{A}|/mk = \epsilon$ . De agora em diante passaremos a uma descrição do procedimento a ser realizado para determinação da correção do problema de Kepler perturbado por meio do estudo da variação

temporal do vetor de Laplace-Runge-Lenz.

Consideremos que a mesma partícula estudada na seção anterior esteja agora sujeita à uma força resultante

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{f}, \quad (20)$$

onde  $k = GMm$  é uma constante positiva  $\delta\mathbf{f}$  é uma pequena perturbação  $|\delta\mathbf{f}| \ll k/r^2$  que pode ou não ter o caráter central. Utilizando as equações

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{f} \quad \text{e} \quad \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}, \quad (21)$$

a taxa de variação temporal  $d\mathbf{A}/dt$  no problema perturbado é dada por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} + \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}); \quad (22)$$

cabe-nos ressaltar que o método a ser apresentado se baseia no fato de que o vetor  $\mathbf{A}$  aponta na direção do semi-eixo maior da órbita elíptica, o que pode ser facilmente percebido pela análise de (17). A idéia a seguir consiste em determinar a velocidade de precessão da órbita, ou seja, determinar a taxa temporal com que gira o vetor  $\mathbf{A}$ . Isso pode ser feito mediante o cálculo das médias temporais em um período da órbita não-perturbada. Nos cálculos dos valores médios, poderemos utilizar as relações válidas na órbita não-perturbada. Tomando a média temporal da equação (22), obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle + \langle \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}) \rangle \quad (23)$$

onde, por definição, a média temporal de uma função  $f$  no intervalo  $\Delta t$  é

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(t') dt'. \quad (24)$$

Caso a função seja periódica, de período  $\tau$ , a média temporal em um período independe do tempo, de modo que a equação anterior pode ser escrita na forma

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(t') dt' = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t') dt'. \quad (25)$$

Entretantes, é conveniente expressarmos  $\langle d\mathbf{A}/dt \rangle$  na forma

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}, \quad (26)$$

pois, desse modo, identificamos a velocidade média de precessão como  $\boldsymbol{\Omega}$ . Além disso, na determinação da influência dos demais planetas do sistema solar no avanço do periélio de Mercúrio, calcularemos médias de funções periódicas do tipo  $f(r(t), \varphi(t))$ . Nesse caso, a equação (24) se reduz a

$$\langle f(r(t), \varphi(t)) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(r(t), \varphi(t)) dt. \quad (27)$$

Como não temos as dependências temporais de  $r$  e  $\varphi$ , mas apenas a equação da órbita  $r(\varphi)$ , é conveniente transformar a integração em  $t$  numa integração em  $\varphi$ . Fazemos isso com o auxílio da relação  $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$ :

$$\begin{aligned} \langle f(r(t), \varphi(t)) \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \\ &= \frac{m}{\ell\tau} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) f(r(\varphi), \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (28)$$

Uma vez descrito nosso método de trabalho, passemos ao cálculo propriamente dito. Antes porém, concebamos algumas hipóteses simplificadoras: (1) Os planetas que perturbam a órbita de Mercúrio têm órbitas circulares com centro no sol (cujo movimento é desprezado) e em um mesmo plano e (2) cada um desses planetas será considerado como um anel homogêneo de massa igual à do planeta em consideração. O que faremos? Calcularemos, inicialmente, o potencial gravitacional criado por um anel na posição de Mercúrio e, desse modo, obteremos a força perturbadora de cada planeta. Aplicaremos, então, o método baseado no vetor de Laplace-Runge-Lenz. **Figura 2.2** mostra, a grosso modo e fora de escala, a órbita (elíptica) de Mercúrio e a órbita circular de um planeta perturbador apenas. O potencial do anel na posição de Mercúrio é dada por

$$\Phi_p(\mathbf{r}) = -G \int_{anel} \frac{\lambda_P ds}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|}; \quad \lambda_p = \frac{M_p}{2\pi r_p}. \quad (29)$$

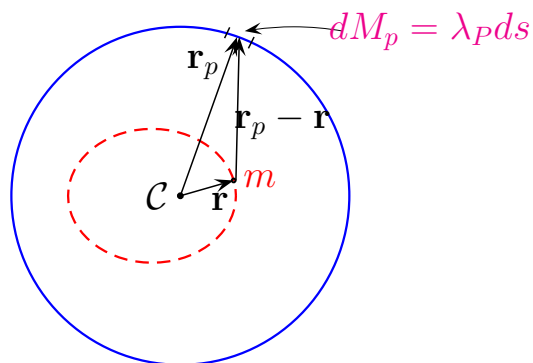


Figura 3 - Órbita elíptica de Mercúrio. Anel circular representando o planeta perturbador de massa  $M_p$ .

Definindo  $\alpha = r/r_p$  e  $\varphi$  como o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_p$ , reescrevemos  $\Phi(\mathbf{r})$  como

$$\Phi(r) = -\frac{GM_p}{\pi r_p} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\varphi}} \quad (30)$$

Após uma pequena manipulação, a expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\Phi(r) = -\frac{GM_p}{\pi r_p} K(\alpha), \quad (31)$$

onde  $K$  é a função elíptica de 1ª espécie, definida por

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}. \quad (32)$$

Para calcularmos a força perturbadora  $\delta \mathbf{f} = -m \nabla \Phi$ , utilizaremos a identidade

$$\frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{E(\alpha)}{1 - \alpha^2} - K(\alpha) \right], \quad (33)$$

onde  $E$  é a função elíptica de 2ª espécie, definida por

$$E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \, d\theta. \quad (34)$$

A força perturbadora causada pelo planeta sobre Mercúrio é dada, então, por

$$\delta \mathbf{f} = -m \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -m \frac{\partial \Phi(r)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}, \quad (35)$$

o que nos fornece o resultado final

$$\delta \mathbf{f} = \frac{2GM_p m}{\pi r_p^2} \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{E(\alpha)}{1 - \alpha^2} - K(\alpha) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad \alpha = \frac{r}{r_p}. \quad (36)$$

Aplicando o método baseado no vetor  $\mathbf{A}$  para essa força perturbadora, obtemos a velocidade de precessão causada em Mercúrio por um planeta qualquer, a saber,

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2M_p}{\tau \pi \varepsilon r_p M} \int_0^{2\pi} r(\theta) \left[ \frac{E(\alpha)}{1 - \alpha^2} - K(\alpha) \right] \cos \theta \, d\theta \, \hat{\boldsymbol{\ell}}, \quad (37)$$

onde  $\tau$  é o período de Mercúrio,  $M$  é a massa do Sol e  $r(\theta) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \theta}$ . Avaliando numericamente a expressão anterior, podemos obter as contribuições newtonianas de cada planeta para a precessão de Mercúrio apresentadas na tabela 1. A expressão *cálculo exato* significa que o cálculo foi realizado levando-se em conta que as órbitas planetárias são elípticas e que estão em planos diferentes.



Planeta	$\Omega$ (segundos/sec)	Cálculo exato
Venus	292,65	277,37
Terra + Lua	95,83	90,92
Marte	2,38	2,48
Júpiter	156,84	154,09
Saturno	7,57	7,32
Urano	0,14	0,14
Netuno	0,04	0,04
Total	555,45	532,36

### 3 A previsão Relativística

A solução clássica é construída a partir da métrica de Minkowski em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 - dt^2, \quad (38)$$

em que impusemos a condição supracitada  $\theta = \pi/2$ . No entanto, a caminho para a obtenção da solução relativística demanda uma reinterpretação de nossa noção de espaço-tempo. Ao assumirmos que o sol é esfericamente simétrico e estático, a métrica apropriada para nosso problema é a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{R}{r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{R}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (39)$$

em que,  $R = 2GM$ . A obtenção da métrica de Schwarzschild, entretantes, escapa o escopo deste artigo. Consideremos num espaço-tempo Riemanniano dois pontos A e B. Pelos pontos A e B podem passar um infinidade de curvas. Parametrizando a curva pelo tempo próprio, se a curva for a geodésia, vale o princípio da Mínima ação

$$\delta \int \left\{ - \left[ 1 - \frac{R}{r} \right] \dot{t}^2 + \left[ 1 - \frac{R}{r} \right]^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right\} d\tau = 0, \quad (40)$$

em que  $\dot{t} = dt/d\tau$ , etc. Valem também as equações de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\phi}) \quad e \quad \frac{d}{d\tau} \left( -2 \left[ 1 - \frac{R}{r} \right] \dot{t} \right), \quad (41)$$

donde segue que

$$L = r^2\dot{\phi} \quad e \quad E = \dot{t}(R/r - 1) \quad (42)$$

são constantes do movimento. Ademais, como a trajetória é tipo **tempo**,  $ds^2/d\tau = -1$ . Assim, diferenciando (39) em relação a  $d\tau$  e multiplicando ambos os membros por  $-1$  obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \left[ 1 - \frac{R}{r} \right] \dot{t}^2 - \left[ 1 - \frac{R}{r} \right]^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{E}{R/r - 1} - \frac{\dot{r}^2}{(R/r - 1)} - \frac{L^2}{r^2} \\ \dot{r}^2 &= (E^2 - 1) + \frac{R}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{RL^2}{r^3} \end{aligned} \quad (43)$$

Se assumirmos que  $L \neq 0$ , podemos admitir que  $\phi \equiv \phi(\tau)$  e com isso escrever  $r$  em função de  $\phi$  de modo que  $\dot{r} = Lr'/r^2$ . Assim teremos que

$$(r')^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2}r^4 + \frac{R_s}{L^2}r^3 - r^2 + R_s r. \quad (44)$$

Para que tenhamos órbitas fechadas precisamos que  $r' \geq 0$ , o que impõe restrições adicionais a  $L$ ,  $E$  e  $R_s$  e na existência de dois pontos de referência  $R_+$  e  $R_-$  em que  $r' = 0$ , respectivamente, afélio e periélio. Logo, o ângulo entre estes dois pontos é dado, no caso clássico, por

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{R_-}^{R_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{E^2-1}{L^2}r^4 + \frac{R_s}{L^2}r^3 - r^2 + R_s r}}. \quad (45)$$

Se fizermos

$$E^2 - 1 = \frac{-R_+R_-R_s + (R_+ + R_-)R_s^2}{R_+R_-(R_+ + R_-R_s) - (R_+ + R_-)^2R_s} \quad (46)$$

e

$$L^2 = \frac{-R_+^2R_-R_s}{R_+R_-(R_+ + R_-R_s) - (R_+ + R_-)^2R_s} \quad (47)$$

e introduzirmos os termos

$$D = \frac{R_+R_-}{R_+ + R_-} \quad (48)$$

e

$$\epsilon = \frac{R_s}{1 - R_s/D}, \quad (49)$$

é possível aproximar

$$\frac{E^2 - 1}{L^2}r^4 + \frac{R_s}{L^2}r^3 - r^2 + R_s r = \frac{1 - E^2}{L^2}(R_+ - r)(r - R_-)(r - \epsilon)r \quad (50)$$

de modo que (45) pode ser reescrito como

$$\phi_+ - \phi_- = \sqrt{\frac{L^2}{1 - E^2}} \int_{R_-}^{R_+} \frac{dr}{r\sqrt{(R_+ - r)(r - R_-)}} \left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)^{-1/2}. \quad (51)$$

Usando a expansão de Taylor  $(1 - \epsilon/r)^{-1/2} \approx 1 + \epsilon/2r$ , com um erro limitado por  $E \leq 3/8(1 - \epsilon/r)^{-5/2}(\epsilon/r)^2 \leq 3/8(1 - \epsilon/R_+)^{-5/2}(\epsilon/R_-)^2$  podemos escrever

$$\phi_+ - \phi_- = \sqrt{\frac{L^2}{1 - E^2}} \int_{R_-}^{R_+} \frac{1 + E}{r^2\sqrt{(R_+ - r)(r - R_-)}} + \frac{\epsilon/2}{r\sqrt{(R_+ - r)(r - R_-)}} dr. \quad (52)$$

Usando uma tabela de integrais, podemos obter o valor de cada um dos termos, a saber

$$\int_{R_-}^{R_+} \frac{dr(1 + E)}{r^2\sqrt{(R_+ - r)(r - R_-)}} = \frac{\pi(1 + E)}{R_+R_-} \quad (53)$$

e

$$\int_{R_-}^{R_+} \frac{dr(\epsilon/2)}{r\sqrt{(R_+ - r)(r - R_-)}} = \frac{1}{\sqrt{R_+ R_-}} \frac{\pi\epsilon}{4D}. \quad (54)$$

Assim teremos

$$\phi_+ - \phi_- = \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1 - R_s/D} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} E. \quad (55)$$

Se usarmos os valores observados  $R_+ = 69,8.10^6 km$ ,  $R_- = 46,0.10^6 km$  (donde obtemos que  $D = 27,7.10^6 km$ ) e  $R_s = 2,95 km$ , obtemos que  $E = 4,88.10^{-15}$ . Ademais, podemos aproximar  $\frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1 - R_s/D} \right) \approx \pi + 2,515.10^{-7}$  obtendo assim uma estimativa razoável para  $\phi_+ - \phi_-$  para metade de uma revolução, em radianos; considerando que Mercúrio completa 415,2 revoluções por século e que há  $360.60.60/2\pi$  arcos de segundo por radiano, obtemos que o periélio de Mercúrio avança os desejáveis

$$(2,515.10^{-7})(2) \left( \frac{360.60.60}{\pi} \right) .415,2 = 43,084 \text{ segarc/sec}. \quad (56)$$

## 4 Conclusão

Como pretendido, após apresentarmos nosso problema, estudamos a solução clássica do problema de Kepler. Em seguida, estudamos o problema de Kepler perturbado, por meio do qual obtivemos as contribuições dos demais planetas do sistema solar na precessão de periélio de Mercúrio, via conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz. Adiante, apresentamos a tradicional correção relativística do problema, que nos contempla com os 43 segundo de arco por século que a relatividade Newtoniana não fora capaz de justificar. Destacamos, por fim, que esta correção constitui-se um dos testes clássicos que corroboram com a consistência da teoria da relatividade geral.

## References

- [1] Oliveira Filho, Kepler de Souza e Oliverira Saraiva, Maria de Fátima. *Astronomia e Astrofísica*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004, 2ª edição;
- [2] Maia, Nelson B. *Introdução à Relatividade*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009;
- [3] Barone, M. A., Ventura, O. S. e Buffon, L. O. *Perturbações de órbitas elípticas*, Revista Capixaba de Ciência e Tecnologia, Vitória, n.3, p.1-5, 2.sem.2007;
- [4] Pais, A. *Sutil é o senhor... - A ciência e a vida de Albert Einstein*, Editora Nova Fronteira, 1995;
- [5] Goldstein, H., Poole, C. e Safko, J. *Classical Mechanics*, Pearson Education, 3ª edição, Nova Delhi, 2007;

- [6] Farina de Souza, Carlos, *O Vetor de Laplace-Runge-Lenz no Problema de Kepler*, Caderno de Física da UEFS Vol.04(2006), n°(s) 1 e 2, 115-159;
- [7] Biesel, Owen; *The Precession of Mercury's Perihelion*, obtido em [www.math.washington.edu/morrow](http://www.math.washington.edu/morrow), acessado em 10 de Julho de 2010;
- [8] Lopes Neto, J. *Mecânica* - v.1. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2006;
- [9] Tort, A. C. *Buracos Negros: Uma introdução para professores do Ensino Médio*; notas de aula do curso de Tópicos de física contemporânea, ministrada no programa de pós-graduação em ensino de física, 2010;
- [10] Jean Sivardière, *Precession of elliptic orbits*, Am. J. Phys. **52**, 909 (1984).
- [11] C. Farina e A.C. Tort, *A Simple Way of Evaluating the Speed of Precession of Orbits*, Am. J. Phys. **56** (1988) 761.
- [12] A. Tort, C. Farina e O.M. Ritter, *Perturbed Isotropic Harmonic Oscillator*, Eur. J. Phys. **10** (1989) 220.