# Aula 5: Gravitação e geometria

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

12 de Abril de 2010

# Massa Inercial e massa gravitacional

Partícula de massa inercial $m$ e massa gravitacional $m_g$:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}\left(\vec{r} - \vec{r}_k, \vec{v} - \vec{v}_k, t\right) + m_g\vec{g}, \tag{1}$$

Considere agora a transformação não-linear:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

Segue que:

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \sum_k \vec{F}\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_k\,', \vec{v}\,' - \vec{v}_k\,', t\right) + (m_g - m)\vec{g}. \tag{3}$$

Se, como os experimentos indicam, a $m = m_g$:

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \sum_k \vec{F}\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_k\,', \vec{v}\,' - \vec{v}_k\,', t\right), \tag{4}$$

e se a partícula estiver isolada do resto,

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = 0, \tag{5}$$

isto é: a partícula estará em queda livre!

# O princípio de equivalência de Einstein

*Então ocorreu-me o pensamento mais feliz de minha vida, na forma seguinte: O campo gravitacional tem existência relativa ... pois para um observador em que cai livremente do telhado de uma casa não há – pelo menos nas suas vizinhanças imediatas – campo gravitacional. De fato, se o observador deixar cair alguns corpos então estes permanecerão em repouso ou de movimento uniforme relativamente a ele, independentemente da sua natureza química ou física particular. O observador tem o direito de interpretar o seu estado como o de repouso.*

Ou, suscintamente:

*Todos os laboratórios em queda-livre, não girantes são equivalantes no que diz respeito às leis da física.*

Evidentemente, os laboratórios em queda livre são os referenciais inerciais de Lorentz, e as leis da física são as leis formuladas relativisticamente.

Por exemplo, em um laboratório em queda-livre, não-girante, mas no qual há campos eletromagnéticos, para uma partícula de massa inercial $m$ e carga $q$ que se move com trivelocidade $\vec{v}$ em relação ao mesmo vale a equação de movimento:

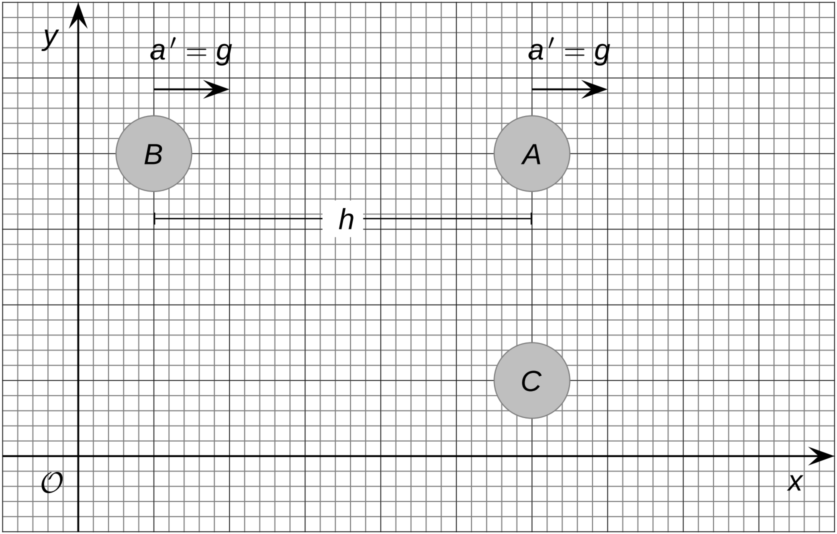
$$m\,\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{F},$$

onde $F$ é o quadriforça que atua sobre a partícula:

$$\mathbf{F} = \left(\gamma\,\frac{qE\cdot\vec{v}}{c}, \gamma q\vec{E} + \gamma\, q\,\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

A constatação de que um campo gravitacional uniforme pode ser eliminado se o observador passar para o referencial em queda-livre coloca, no contexto, a gravitação no mesmo nível das forças inerciais da mecânica newtoniana, a força centrífuga, a força de Coriolis e outras, pois tais forças só aparecem em referenciais inerciais acelerados e podem ser eliminadas se o observador passar para um referencial inercial galileano.

# A duração temporal em campos gravitacionais



De acordo com as transformações de Lorentz para a (tri)aceleração:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \dfrac{V\, v'_x}{c^2}\right)^3}.$$

o observador inercial medirá uma (tri)aceleração:

$$a_x = \frac{g}{\gamma^3} = g \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{3/2} = g \left(1 - \beta_A^2\right)^{3/2},$$

Fazendo $\beta_A(0) = 0$, segue que

$$\beta_A(t) = \frac{\left({}^{gt}/_{c}\right)}{\sqrt{1 - \left({}^{gt}/_{c}\right)^2}}.$$

O fator cinemático $\gamma$ se escreve:

$$\gamma_A(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_A^2}} = \sqrt{1 + \left({}^{gt}/_{c}\right)^2}.$$

A relação entre a duração marcada pelo relógio acelerado, que mede tempo próprio, e a duração marcada pelo relógio em repouso $C$, que mede tempo coordenado, é dada por:

$$d\tau_A = \frac{dt_C}{\gamma_A(t)} = \frac{dt_C}{\sqrt{1 + \left({}^{gt}\!/_{c}\right)^2}}.$$

Se $gt \ll c$, e $t = t_A$ é o instante em que o relógio $A$ passa pelo relógio $C$, podemos escrever:

$$d\tau_A \approx dt_C \left(1 - \frac{g^2 t_A^2}{2c^2}\right).$$

Da mesma forma, quando o relógio $B$ passa pelo relógio $C$:

$$d\tau_B \approx dt_C \left(1 - \frac{g^2 t_B^2}{2c^2}\right).$$

A razão entre as durações é:

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \left(1 - \frac{g^2t_A^2}{c^2}\right) \Bigg/ \left(1 - \frac{g^2t_B^2}{c^2}\right) \approx \left(1 - \frac{g^2t_A^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{g^2t_B^2}{c^2}\right) \approx 1 - \frac{gh}{c^2},$$

onde usamos a relação $v_A^2 = v_B^2 + 2gh$.

# Métrica em presença de um campo fraco

Os resultados acima sugerem a seguinte generalização: em um campo gravitacional fraco, mas não uniforme:

$$(ds)^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi\left(\vec{r}\right)}{c^2}\right)(cdt)^2 + (d\ell)^2\,,$$

onde $\Phi\left(\vec{r}\right)$ é o potencial gravitacional e $(d\ell)^2$ é a métrica (independente do tempo) do (tri)espaço convencional.
Para uma distribuição localizada de massa esfericamente simétrica, como por exemplo, no modelo idealizado de uma estrela de raio (aproximado) $R$, (o nosso Sol, por exemplo):

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = -\frac{GM}{r^2}$$

onde $M$ é a massa total da distribuição e $r > R$ é a distância de um ponto externo à origem da distribuição.

É possível mostrar que para uma métrica estática, isto é, uma métrica que não depende do tempo coordenado, podemos escrever:

$$(ds)^2 = -e^{2\Phi(\vec{r})/c^2} (cdt)^2 + (d\ell)^2 .$$

Na aproximação de campo fraco:

$$e^{2\Phi(\vec{r})/c^2} \approx 1 + \frac{2\Phi\left(\vec{r}\right)}{c^2}.$$

# O princípio de mínima ação e a gravitação newtoniana

Considere dois eventos no espaçotempo, digamos, $A$ e $B$. A distância tipo tempo entre esses dois eventos é dada por:

$$c\,\tau_{AB} = \int_A^B c\,d\tau,$$

onde,

$$cd\tau = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}} = \sqrt{(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}.$$

Se a curva no espaçotempo for descrita em termos de um parâmetro invariante, digamos $\sigma$, definido em um intervalo apropriado, isto é:

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_A, \sigma_B],$$

a distância tipo tempo assume a forma:

$$c\,\tau_{AB} = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{\left(\frac{d(ct)}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2}.$$

O princípio de mínima ação no espaçotempo quadridimensional se escreve:

$$\delta\left(\int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}}\right) = 0,$$

que nos conduz às equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\sigma}\frac{\partial L}{\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\right)} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3; \tag{6}$$

onde $L$ é o lagrangiano que aqui assume a forma:

$$L = \sqrt{\left(\frac{d(ct)}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2}.$$

Segue que:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = 0,$$

que é a equação newtoniana para uma partícula livre no espaçotempo quadridimensional.

Consideremos agora o efeito de um campo gravitacional fraco:

$$c\,d\tau = \left(1 + 2\frac{\Phi\left(\vec{r}\right)}{c^2}\right)\left(dx^0\right)^2 - \left((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right),$$

logo:

$$c\,\tau_{AB} = \int_A^B c\,d\tau = \int_{t_A}^{t_B} c\,dt\,\sqrt{1 + 2\frac{\Phi\left(\vec{r}\right)}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}},$$

onde o tempo coordenado $t$ funciona como parâmetro,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Se o campo gravitacional for fraco, podemos escrever:

$$\int_{t_A}^{t_B} c\,dt\sqrt{\left(1+2\frac{\Phi\left(\vec{r}\right)}{c^2}\right)-\frac{v^2}{c^2}} \approx \int_A^B cdt\left(1+\frac{\Phi\left(x,y,z\right)}{c^2}-\frac{v^2}{2\,c^2}\right).$$

As equações de Euler-Lagrange se escrevem:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}=0, \qquad k=x,y,z,$$

onde:

$$L\left(x^k,\dot{x}^k,t\right)=c+\frac{\Phi\left(x,y,z\right)}{c^2}-\frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)}{c^2},$$

é o lagrangiano associado com a métrica.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \ddot{x}^k = 0, \qquad k = x, y, z,$$

ou ainda:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi.$$

Fim da aula 5