Instituto de Física – UFRJ
Mestrado em Ensino
profissional

Tópicos de Física Clássica II – 2ª Lista de Exercícios

Segundo Semestre de 2008 – Prof. A C Tort

Problema 1 *Densidade de corrente de deslocamento* Eis um modo mais formal de obter a densidade de corrente de deslocamento $\mathbf{J}_d$.

(a) Escreva a lei de Ampère na forma diferencial e mostre que ela conduz ao resultado:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

que é válida se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Isto significa que a lei de Ampére para a magnetostática não se aplica quando a densidade de carga ρ depende explicitamente do tempo.

(b) Faça a substituição: $\mathbf{J} \to \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$ e imponha a condição de que a nova corrente deve satisfazer a condição:

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) = 0.$$

O termo $\mathbf{J}$ representa a corrente física e portanto deve satisfazer à equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Deste ponto em diante é com você. Mostre que com o exposto acima mais a lei de Gauss na forma diferencial obtém-se a forma explícita da densidade de corrente de deslocamento:

$$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Problema 2 *Corrente de deslocamento* Considere um capacitor de placas paralelas formado por dois discos de raio a separados por uma distância $d \ll a$, no vácuo. A carga em uma das placas varia no tempo de acordo com $q(t) = q_0 \operatorname{sen}(\omega t)$. Suponha que o campo elétrico entre as placas seja uniforme e despreze os efeitos de borda. Considere o eixo z ao longo do eixo principal do capacitor.

(a) Determine a corrente de deslocamento.

(b) Determine o campo magnético entre as placas.

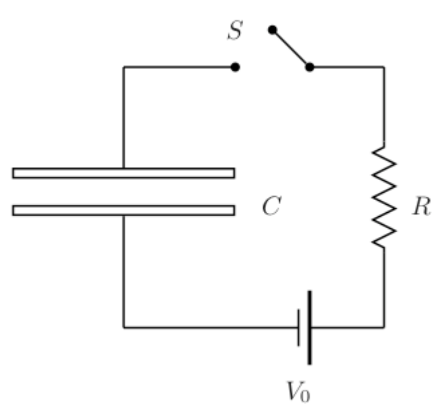
Problema 3 *Corrente de deslocamento, vetor de Poynting* Um capacitor de placas circulares paralelas de raio a separadas por uma distância $d \ll 2a$ é conectado em série com uma resistência R e um fonte de voltagem V_0 que também estão conectados em série. Durante a fase de descarga do capacitor a voltagem entre as placas varia de acordo com $V(t) = V_0 e^{-t/RC}$, onde C é a capacitância do capacitor.

(a) Calcule o campo elétrico entre as placas do capacitor.

(b) Calcule a corrente de deslocamento.

(c) Calcule o campo de indução magnética $\mathbf{B}$ entre as placas do capacitor.

(d) Calcule o vetor de Poynting instantâneo entre as placas.



Problema 4 *A solução de d'Alembert* Considere a equação da corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Verifique que:

$$y(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt),$$

é a solução geral dessa equação. Sugestão: faça $u(x,t) := x \pm vt$.

Problema 5 Verifique que:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}},$$

tem dimensões de velocidade. Calcule o valor de c.

Problema 6 *Ondas eletromagnéticas planas* Suponha uma onda eletromagnética propagando-se no vácuo com componentes restritos a funções da forma $(z - ct)$, isto é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,(z,t) &= E_x\,(z-ct)\,\mathbf{e}_x + E_y\,(z-ct)\,\mathbf{e}_y + E_z\,(z-ct)\,\mathbf{e}_z \\
\\
\mathbf{B}\,(x,t) &= B_x\,(z-ct)\,\mathbf{e}_x + B_y\,(z-ct)\,\mathbf{e}_y + B_z\,(z-ct)\,\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Use as equações de Maxwell (completas) na forma diferencial para mostrar que apenas duas dessas seis funções, a saber: $E_x(z-vt)$ e $E_y(z-vt)$, são linearmente independentes. Estas duas funções, como veremos mais tarde, correspondem aos dois estados de polarização possíveis da onda eletromagnética plana que estamos discutindo.

Problema 7 *Resultados úteis* O valor médio temporal de uma função do tempo é definido por:

$$\langle f \rangle := \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f(t)dt,$$

onde τ é um intervalo de tempo fixo, fisicamente, associado com o tempo característico do detector.

Calcule o valor médio no tempo das seguintes funções harmônicas:

(a)

$$\cos\left(kz - \omega t + \delta\right),$$

$$\operatorname{sen}\left(kz - \omega t + \delta\right).$$

(b)

$$\cos^2\left(kz - \omega t + \delta\right),$$

$$\operatorname{sen}^2\left(kz - \omega t + \delta\right).$$

Respostas.: zero, zero, 1/2, 1/2..

Problema 8 O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana e harmônica que propaga-se no vácuo é dado por:

$$E_x = 0$$
$$E_y = 50\cos\left(\frac{2\pi}{3}x - 2\pi \times 10^{15}\,t\right)$$
$$E_z = 0$$

Determine:

(a) a freqüência linear associada;

(b) o comprimento de onda;

(c) a direção e sentido de propagação da onda;

(d) o campo magnético associado;

(e) o vetor de Poynting instantâneo;

(f) o valor médio no tempo do vetor de Poynting.

Problema 9 *Duro de matar I* Mostre que se definirmos a velocidade $\mathbf{v}$ de propagação da energia eletromagnética associada com campos eétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ arbitrários por meio da relação:

$$\mathbf{S} = u_{em}\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{S}$ é o vetor de Poynting e u_{em} é a densidade de energia eletromagnética, então:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) u_{em}^2 = (u_e - u_m)^2 + \frac{\epsilon_0}{\mu_0}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2,$$

onde u_e é a densidade de energia elétrica e u_m é a densidade de energia magnética. Analise cuidadosamente este resultado. *Sugestão*: use a identidade vetorial $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

Problema 10 Em um guia de ondas de seção reta retangular um dos modos de propagação da onda eletromagnética é dado por:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t - kz\right)\,\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) \;=\; -E_0\,\frac{k}{\omega}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t - kz\right)\,\mathbf{e}_x - E_0\,\frac{\pi}{\omega a}\,\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - kz\right)\,\mathbf{e}_z.$$

(a) Calcule o vetor de Poyinting $\mathbf{S}$.

(b) Calcule a média temporal do fluxo de energia através de um plano perpendicular ao eixo z.

Problema 11 Na sabedoria pragmática do homem do interior consta que a cobra é um bicho danado, se a bota do infeliz tiver um rasgão ou um furo, a bicha vai direto no mesmo. Você acha isto plausível? Explique.

Problema 12 Como funciona um microondas?

Problema 13 *Vetor de Poynting* Um fio condutor retilíneo cilíndrico muito longo, de condutividade σ e raio a transporta uma corrente constante. O fio é ôhmico, i.e.: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, e a corrente I está uniformemente distribuída pela seção reta do fio. Considere o eixo principal do cilindro como o eixo z.

(a) Calcule o campo magnético $\mathbf{B}$ na superfície do fio.

(b) Calcule o vetor de Poynting $\mathbf{S}$ na superfície do fio.

(c) Mostre que o fluxo de $\mathbf{S}$ através da superfície de um trecho de comprimento ℓ do fio é igual à energia por unidade de tempo dissipada pelo calor (no trecho) por meio do efeito Joule.

Problema 14 *Pressão de radiação I* Mostre que para uma superfície perfeitamente refletora a pressão de radiação será dada por:

$$p_{\text{rad}} = 2\,\frac{\langle S\rangle}{c}$$

onde $\langle S\rangle$ é a intensidade média da radiação e a incidência é normal.

Problema 15 *Pressão de radiação II* Uma onda eletromagnética de intensidade igual a 200 $\mathrm{W/m^2}$ incide perpendicularmente sobre um pedaço retangular de cartolina preta de 20 cm por 30 cm.

(a) Calcule a força exercida pela radiação sobre o retângulo de cartolina.

(b) Troque a cartolina preta por uma cartolna branca de mesmas dimensões e repita o cálculo.

(c) Refaça os cálculos supondo que a radiação incidente forma um ângulo de 30 graus com a normal.

Problema 16 *Pressão de radiação III* Mostre que se uma onda plana incidir sobre uma superfície perfeitamente refletora obliquamente então

$$p_{\text{rad}}\,(\theta) = 2\,\frac{\langle S\rangle}{c}\cos^2\theta$$

onde θ é o ângulo de incidência.

Problema 17 *Duro de matar II* Uma onda eletromagnética plana incide sobre uma esfera perfeitamente refletora de raio R.

(a) Mostre que a força exercida pela radiação sobre esfera é dada por:

$$F = \frac{\pi R^2\langle S\rangle}{c}$$

na direção e sentido da onda plana incidente. Sugestão: use o resultado do problema anterior.

(b) Mostre que se a esfera for perfeitamente absorvedora o resultado é o mesmo!

(c) Como explicar fisicamente este resultado?

Problema 18 O escritor inglês Arthur Clarke sugeriu em um de seus contos de ficção científica ('Vento Solar ') que uma espaçonave poderia ser propelida pela radiação solar tal qual um veleiro pelo vento. Qual deve ser a densidade superficial de massa de uma vela perfeitamente refletora para que a força da radiação solar seja o dobro da força de atração gravitacional do Sol sobre a vela? Suponha incidência normal do vento solar sobre a vela. Os dados que você precisa podem ser obtidos no seu livro texto. Compare o seu resultado com a densidade do papel A4 que apresenta uma gramatura de 75 gramas por metro quadrado. Resposta: o papel A4 é cem vezes mais denso.