Instituto de Física – UFRJ
Mestrado em Ensino
profissional

Tópicos de Física Clássica II – 1ª Lista de Exercícios

Segundo Semestre de 2008 – Prof. A C Tort

Exercício 1 *O operador nabla* Começamos definindo o operador linear vetorial ∇ em coordenadas cartesianas:

$$\nabla := \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Em algumas situações geralmente ditadas pela simetria do problema convém rescrever o operador nabla em coordenadas curvilíneas. **Escreva** o operador ∇ em:

(a) coordenadas cilíndricas;

(b) coordenadas esféricas.

(c) Calcule $\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla$ em coordenadas cartesianas.

(d) **Escreva** ∇^2 em coordenadas cilíndricas e esféricas.

Exercício 2 *Gradiente, divergente e rotacional* Com o operador ∇ podemos efetuar três operações diferenciais importantes para a eletrodinâmica, a saber:

$\nabla\,\phi$, o gradiente de uma função escalar,

$\nabla \cdot\, \mathbf{F}$, o divergente de uma função vetorial,

$\nabla\, \times\, \mathbf{F}$, o rotacional de uma função vetorial.

Escreva essas operações em: (a) coordenadas cartesianas; (b) coordenadas cilíndricas; (c) coordenadas esféricas.

Exercício 3 Suponha que $\phi(x, y, z, t)$ seja uma função escalar diferenciável definida em uma região U contida no $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Mostre que:

$$d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt.$$

Exercício 4 Suponha que $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ seja uma função vetorial diferenciável definida em uma região U contida no $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Mostre que:

$$d\mathbf{F} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\ \mathbf{F} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

Exercício 5 Suponha que ϕ seja uma função escalar diferenciável definida em uma região U contida no $\mathbb{R}^3$. Suponha também que esta função apresente simetria esférica, i.e.:

$$\phi\,(x, y, z) = \phi\,(r)\,,$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Mostre que:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dr}\,\mathbf{e}_r,$$

sem fazer uso da representação em coordenadas curvilíneas do operador nabla.

Exercício 6 O potencial eletrostático de um dipolo elétrico $\mathbf{p}$ colocado na origem é dado por:

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\ r^3},$$

onde $r = \|\mathbf{r}\|$ é a distância radial à origem. Calcule o campo elétrico associado.

Exercício 7 *Divergente e rotacional* Calcule o divergente e o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

(a) $\mathbf{F} = (x + y)\,\mathbf{e}_x + (-x + y)\,\mathbf{e}_y - 2z\,\mathbf{e}_z$;

(b) $\mathbf{G} = 2y\,\mathbf{e}_x + (2x + 3z)\,\mathbf{e}_y + 3y\,\mathbf{e}_z$;

(c) $\mathbf{H} = (x^2 - z^2)\ \mathbf{e}_x + 2\,\mathbf{e}_y + 2xz\,\mathbf{e}_z$.

Exercício 8 Mostre que se ϕ é uma função escalar diferenciável definida em uma região U contida no $\mathbb{R}^3$, então:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0,$$

em todos os pontos de U.

Exercício 9 Enuncie (não é necessário demonstrar) o teorema de Stokes. Tente entender o seu significado e condições de validade.

Exercício 10 Enuncie (não é necessário demonstrar) o teorema de Gauss ou da divergência. Tente entender o seu significado e condições de validade.

Exercício 11 *Testando o teorema de Stokes* Considere o campo vetorial:

$$\mathbf{A} = -y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y.$$

(a) Faça um esboço gráfico das linhas de campo.

(b) Calcule:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s},$$

sobre a curva $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$.

(c) Agora calcule:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da,$$

onde S 'e a região contida no plano $x\,y$ limitada pela curva dada acima e verifique explicitamente a validade do teorema de Stokes.

Exercício 12 *Testando o teorema de Gauss* Dado o campo vetorial

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z,$$

(a) Calcule:

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{r} dv,$$

onde $\mathcal{R}$ é o interior de uma esfera de raio R com centro na origem.

(b) Calcule agora

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da,$$

onde $\mathcal{S}$ é a fronteira de $\mathcal{R}$ do item anterior, e verifique explicitamente o teorema de Gauss.

Exercício 13 *Um resultado importante* Mostre que para um campo vetorial $\mathbf{A}$ definido em uma região $\mathcal{R}$ e com derivadas contínuas:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

em todos os pontos de $\mathcal{R}$.

Exercício 14 Dê um exemplo do uso do teorema de Stokes na eletrostática.

Exercício 15 Dê um exemplo do uso do teorema de Gauss na eletrostática.

Problema 1 *O ângulo sólido* Seja $\mathcal{S}$ uma superfície suave, orientável, mas arbitrária, e P um ponto a partir do qual emanam semi-retas que interceptam $\mathcal{S}$ *apenas uma vez*. O conjunto dessas semi-retas, denotado por $\Omega(\mathcal{S})$, é **por definição** o ângulo sólido com vértice em P subtendido por $\mathcal{S}$. A medida deste conjunto é definida da seguinte forma: seja $\Sigma(R)$, a interseção de $\Omega\,(\mathcal{S})$ com a superfície de uma esfera de raio R cujo centro é o ponto P. O quociente:

$$\frac{\text{área de } \Sigma(R)}{R^2},$$

denotado por $|\Omega\,(\mathcal{S})\,|$, é **por definição**, a medida do ângulo sólido $\Omega\,(\mathcal{S})$.

(a) Mostre que a medida pode ser escrita na forma:

$$|\Omega\,(\mathcal{S})\,| = \frac{\text{área de } \Sigma(R)}{R^2} = \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r^3}\, d\mathcal{A}\,,$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição de um ponto arbitrário de $\mathcal{S}$ em relação a P, $r = \|\mathbf{r}\|$, e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário externo à $\mathcal{S}$. **Observe que a medida do ângulo sólido não depende do raio** R. *Sugestão*: aplique o teorema da divergência ao campo vetorial:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r^3},$$

na porção de $\Omega(\mathcal{S})$ compreendida entre $\Sigma(R)$ e $\mathcal{S}$.

(b) Agora mostre que se $\mathcal{S}$ for uma superfície suave, arbitrária, fechada então:

$$|\Omega(\mathcal{S})| = \oint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{r^3}\, dS = \begin{cases} 4\pi \text{ se } P \text{ for interno a } \mathcal{S}, \\ 0 \text{ se } P \text{ for externo a } \mathcal{S}. \end{cases}$$

Obs: uma discussão alternativa sobre o conceito de ângulo sólido pode ser encontrada em *H.M. Nussenzveig: Curso de Física Básica, vol. 3, Eletromagnetismo, Cap. 3.* A discussão feita acima segue de: T. Apostol, *Calculus*, 2nd ed., Vol. II, J. Wiley, mas pode ser encontrada em outros livros contendo material sobre análise vetorial, por exemplo, há um volume da coleção Schaun sobre cálculo vetorial (em portugês) com vários exercícios resolvidos e propostos sobre os temas que nos interessa aqui.