INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Pós-Graduação

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Tópicos de Física Clássica I

2009 - 1

1 Funções

1.1 Definição. Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é uma relação de A com B que relaciona *cada* elemento de A com um *único* elemento de B. Denotamos a existência de uma tal função pelo símbolo $f : A \rightarrow B$, que é lido: *f é uma função de A em B*. O conjunto A é chamado **domínio** de f e o conjunto B, **contradomínio**. Se f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B, dizemos que f *associa* a x o elemento y e denotamos esse fato escrevendo $f : x \mapsto y$ ou $y = f(x)$. Nesse caso também dizemos que y é a *imagem* de x pela função f, ou que f *transforma* x em y. É comum indicar a função pelo símbolo composto $f : A \rightarrow B : x \mapsto y$, também escrito na forma

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ : x &\longmapsto y \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Duas funções f e g são **iguais** se têm o mesmo domínio, digamos A, o mesmo contradomínio, e $f(x) = g(x)$ para qualquer x em A. O conjunto de todas as funções de A em B é denotado por B^A.

1.1.1 Exemplo. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos brasileiros vivos hoje, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $I : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ a função que associa a cada elemento de $\mathcal{B}$ sua idade em $\mathbb{N}$.

1.1.2 Exemplo. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto \sqrt{n}$ a função que associa a cada número natural a sua raíz quadrada. Assim, $r(4) = 2$, $r(2) = 1,414\ldots$ etc.

1.1.3 Exemplo. A função $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real o seu quadrado, $q(x) = x^2$ para qualquer x em $\mathbb{R}$.

1.1.4 Exemplo. As funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1.5 Exemplo. Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos do espaço (euclidiano) e $\mathcal{OXYZ}$ um sistema de eixos cartesianos. Por meio desse sistema associamos a cada ponto P de $\mathcal{E}$ uma única trinca de números reais (x, y, z), as coordenadas de P relativas a $\mathcal{OXYZ}$. Com isso fica definida a função $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$ com $\mathcal{M}(P) = (x, y, z)$. Um outro sistema de eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ define uma outra função, em geral diferente, $\mathcal{M}' : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$ com com $\mathcal{M}'(P) = (x', y', z')$.

1.1.6 Exemplo. Uma régua define uma função d que associa a cada par de pontos do espaço um único número real, a distância entre eles, $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$.

1.1.7 Exemplo. Sejam $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e Δ_0 a função que associa a cada função de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o seu valor na origem,

$$\begin{aligned} \Delta_0 &: \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: f \longmapsto f(0) \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

Assim, $\Delta_0(\operatorname{sen}) = 0$ e $\Delta_0(\cos) = 1$.

1.1.8 Para qualquer conjunto A, definimos a função $\mathrm{id}_A : A \to A : x \mapsto x$, chamada **função identidade** em A.

1.2 O conjunto das imagens de todos os elementos do domínio de uma função é chamado **imagem da função**. Obviamente, a imagem de uma função é um subconjunto de seu contradomínio. Se $f : A \to B$, a imagem de f é o conjunto $f(A) = \{y \in B | y = f(x)$ para algum $x \in A\}$. Assim, $\operatorname{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Uma função é dita **sobrejetora** se sua imagem coincide com o seu contradomínio.

1.2.1 Exemplo. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $s(x) = 2x + 1$ é sobrejetora.

1.2.2 Exemplo. $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ é sobrejetora.

1.2.3 Exemplo. A função q do exemplo **1.1.3** não é sobrejetora, pois sua imagem $q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq}$, o conjunto dos reais não-negativos, que não é igual ao seu contradomínio $\mathbb{R}$. A função $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq}$, definida por $Q(x) = x^2$, é sobrejetora.

1.3 Uma função é dita **injetora** se cada elemento de sua imagem é imagem de um único elemento de seu domínio.

1.3.1 Exemplo. I do exemplo **1.1.1** não é injetora e r do exemplo **1.1.2** é injetora.

1.4 Uma função **bijetora** é uma função que é injetora e sobrejetora. Se $f : A \to B$ é bijetora, então existe uma, e somente uma, função $f^{-1} : B \to A$ tal que $y = f(x)$ se, e somente se, $x = f^{-1}(y)$. A função f^{-1} é chamada inversa de f. A inversa de f^{-1} é f.

1.4.1 Exemplo. $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ é bijetora e sua inversa é a função arcotangente, $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}$.

1.4.2 Exemplo. A função q do exemplo **1.1.3** e a função Q do exemplo **1.2.3** não são bijetoras. A função $\mathcal{Q} : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq} : x \mapsto x^2$ é bijetora e $\mathcal{R} : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq} : x \mapsto \sqrt{x}$ é sua inversa, $\mathcal{R} = \mathcal{Q}^{-1}$.

1.4.3 São bijetoras id_A, s do exemplo **1.2.1** e $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ do exemplo **1.1.5**.

1.5 Função constante. Seja a função $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada elemento do domínio $\mathbb{R}$ um único elemento no contradomínio $\mathbb{R}$, digamos o número 7; nesse caso $s(x) = 7$ para qualquer x em $\mathbb{R}$. Esse é um exemplo do que chamamos função constante. Como a imagem da função não muda ao variarmos x, é costume dizer que a imagem $s(x)$ independe da variável x. De um modo geral, a função $f : A \to B$ é dita uma **função constante**, se a imagem da função em B é constituída por um único elemento, digamos β; assim $f(x) = \beta$ para qualquer x em A. Agora, seja a função $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $S(x, y) = 7 + y^3$. A imagem $S(x, y)$ dessa função muda ao variarmos y e não muda ao variarmos x; dizemos que a imagem $S(x, y)$ independe da variável x e que S é uma função constante na variável x. Nesse caso, podemos pensar em substituir a função S pela função $S_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $S_1(y) = 7 + y^3$ e obtida de S pela eliminação da “variável” x, que não afeta a imagem de S. Esse procedimento de eliminação de “variáveis” pode ser conveniente em alguns casos, mas inconveniente ou proibitivo em outros, nos quais mantemos todas as “variáveis” nas funções, mesmo que algumas não dependam dessa ou daquela “variável”.

1.6 Se $f : A \to B$, $g : B_1 \to C$, e o contradomínio B de f está contido no domínio B_1 de g, então existe uma, e somente uma função $g \circ f : A \to C$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo x em A. Chamamos $g \circ f$ **função composta** de g e f. A composição de funções é associativa mas, em geral, não é comutativa.

1.6.1 Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então $g = f^{-1}$ se, e somente se, $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Em particular, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$

1.6.2 Exemplo. Dadas as funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = 2x + 1$, temos as compostas $(\operatorname{sen} \circ r)(x) = \operatorname{sen}(2x + 1)$ e $(r \circ \operatorname{sen})(x) = 2 \operatorname{sen}(x) + 1$.

1.6.3 Exemplo. Seja a função $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $L(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2$. Ela transforma um par de números em um único número. Assim, L transforma o par $(5, 1)$ no número 26, *i.e.*, $L(5, 1) = 26$. Agora, sejam as funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = 2x + 1$. Com elas podemos formar uma função g cujo contradomínio está contido no domínio de L. Com efeito, esse é o caso de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (\operatorname{sen}(x), r(x)) = (\operatorname{sen}(x), 2x + 1)$. A composta de L e g é $L \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(L \circ g)(x) = \operatorname{sen}^2(x) + (2x + 1)^2$; denotando-a por L_1, temos $L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $L_1(x) = \operatorname{sen}^2(x) + (2x + 1)^2$.

Na prática, para obter essa função composta deixamos implícita a definição de g e seguimos um algorítmo muito simples. Escrevemos

$$L(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2 \;, \quad q_1 = \operatorname{sen}(x) \;, \quad q_2 = 2x + 1 \tag{3}$$

e substituímos essas expressões de q_1 e q_2 em função de x na expressão da função L para obter, imediatamente, $L_1(x) = \operatorname{sen}^2(x) + (2x+1)^2$.

1.6.4 Exemplo. As funções $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ do exemplo **1.1.5** dão origem à função bijetora $\mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M}'$, que é uma trasformação de coordenadas.

1.7 Seja a função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, na qual o domínio é um intervalo aberto (a, b) de $\mathbb{R}$. Se $x \in (a, b)$ e o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4}$$

existe, ele é chamado **derivada** de f em x e denotado por $df(x)/dx$. Se f tem derivada em cada ponto de (a, b), fica definida a função f', chamada **função derivada** de f, que associa a cada ponto desse intervalo a derivada de f nesse ponto, *i.e.*, $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ com $f'(x) := df(x)/dx$.

Representemos por $\mathcal{C}(a,b)$ o conjunto de todas as funções contínuas de (a,b) em $\mathbb{R}$, e por $\mathcal{C}^1(a,b)$ o conjunto de todas as funções cujas funções derivadas são contínuas. Agora, definimos uma função D que transforma funções em funções,

$$\begin{aligned} D &: \mathcal{C}^1(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(a,b) \\ &: f \longmapsto f' \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

Mais especificamente, transforma uma função em sua função derivada, $D(f) = f'$. A própria função D pode ser chamada **derivação**.

1.7.1 Exemplo. Sejam as funções $p_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definidas por $p_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Usando a função D (no caso em que $(a,b) = (-1,1)$), obtemos que D transforma a função p_n na função Dp_n dada por $(Dp_n)(x) = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1.7.2 Exemplo. Tomando o intervalo (a,b) como sendo $\mathbb{R}$ temos para as funções sen e $\cos$ citadas no exemplo **1.1.4**, $D(\operatorname{sen}) = \cos$.

1.8 Seja $\mathcal{C}[a,b]$ o conjunto das funções contínuas que têm por domínio o intervalo fechado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ e por contradomínio o próprio $\mathbb{R}$. Agora definimos uma função $\int_{[a,b]}$ que transforma funções em números, especificamente, ela associa a cada função do conjunto $\mathcal{C}[a,b]$ a sua integral no intervalo $[a,b]$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} &: \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: f \longmapsto \int_{[a,b]}(f) \quad , \end{aligned} \tag{6}$$

onde

$$\int_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad . \tag{7}$$

A função $\int_{[a,b]}$ pode ser chamada **integração** no intervalo $[a,b]$.

1.8.1 Exemplo. Tomando $[a,b]$ como sendo $[-1,1]$ e usando as funções $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,3)$ definidas por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x^2$, obtemos $\int_{[-1,1]}(f_0) = 2$, $\int_{[-1,1]}(f_1) = 0$ e $\int_{[-1,1]}(f_2) = 2/3$.

1.9 Nomenclatura e notação.

1.9.1 Algumas palavras que são usadas como sinônimos de função são **aplicação**, **mapa** e **mapeamento**.

1.9.2 Alguns tipos específicos de funções recebem nomes especiais. Assim, uma função como a derivação D definida em (5), que transforma funções em funções, costuma ser chamada **transformação**. Já uma função que transforma funções em números, costuma ser chamada **funcional**; a funçao integração $\int_{[a,b]}$ definida em (6) e (7), e a função Δ_0 definida em (2) são exemplos de funcionais. A importância do funcional integração é bem conhecida. Apesar de sua simplicidade, Δ_0, um exemplo de **funcional de Dirac**, é também de extrema importância em Física e Matemática. Mais a frente veremos que há um significado mais geral para os conceitos de transformação e de funcional.

Muitas funções são chamadas **operações**. Esse é o caso, por exemplo, da função que associa a cada par de números reais a sua soma, e que chamamos operação de adição de reais. Outros exemplos de nomes que designam tipos especiais de funções são **operador** e **tensor**.

1.9.3 É muito comum usar para funções o que podemos chamar **notação desleixada**. Ela consiste em usar o mesmo símbolo para representar a função e os elementos da imagem da função. Assim, em vez de escrevermos $y = f(x)$, escrevemos $y = y(x)$. A notação desleixada tem a virtude de economizar letras no formalismo e, com isso, facilitar o desenvolvimento dos cálculos que nele aparecem. No entanto, como nessa notação uma dada letra designa dois conceitos distintos, devemos saber o que ela significa em cada caso para evitar confusões.

1.10 Praticamente todos os conceitos da Física e todas as suas leis contém o conceito de função. Se uma figura vale por mil palavras, uma função vale por mil figuras.