Tópicos em Física Clássica I - 2009/1
1ª Lista de Exercícios. 04-25/03/2009

1.1 Determine a imagem de cada uma das seguintes funções.
(i) $I : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$, onde $\mathcal{B}$ é o conjunto dos brasileiros vivos hoje, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e I associa a cada elemento de $\mathcal{B}$ sua idade em $\mathbb{N}$.
(ii) A função $\sqrt{\ } : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural a sua raíz quadrada.
(iii) A função $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real o seu quadrado, $q(x) = x^2$.
(iv) O funcional de Dirac

$$\begin{aligned} \Delta_0 : \mathcal{C}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : f &\longmapsto f(0) \quad , \end{aligned}$$

no qual $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
(v) A função seno hiperbólico, $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.2 Determine se cada uma das funções do exercício anterior é injetora, sobrejetora ou bijetora.

1.3 **(i)** Explique porque a função $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não tem inversa. (ii) Escolha os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ de modo que a função $\operatorname{Sen} : [a, b] \to [c, d]$ goze das seguintes propriedades: $\operatorname{Sen}(x) = \operatorname{sen}(x)$ se $x \in [a, b]$ e Sen tem inversa.

1.4 Defina a função bijetora de transformação de coordenadas esféricas em coordenadas cartesianas.

1.5 **(i)** Sejam as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \sqrt{9 + x^2}$, $f_3(x) = x^{5/3}$ e $f_4(x) = x^{1/3}$. Quais dessas funções pertencem ao domínio da transformação

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ : f &\longmapsto f' \quad , \end{aligned}$$

na qual $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com derivadas primeiras contínuas.

(ii) Determine a imagem sob D das funções que pertencem ao domínio de D.

1.6 Sejam as funções $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) definidas por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ e $f_2(x) = e^x$. Determine suas imagens $\int_{[-1,1]}(f_n)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) sob o funcional

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} : \mathcal{C}[-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : f &\longmapsto \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx \quad . \end{aligned}$$