

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA

**PROJETO DE OBSERVADORES PARA SISTEMAS
DESCRITORES REGULARES**

Autor:

Miguel Boavista Quartin

Orientador:

Roosevelt José Dias, D.Sc.

Examinador:

Fernando C. Lizarralde, D.Sc.

Examinador:

Jomar Gozzi, M.Sc.

DEL

Fevereiro de 2004

Agradecimentos

Sou eternamente grato:

- ao professor Roosevelt José Dias, por seu profundo conhecimento e sabedoria, dos quais espero haver absorvido um pouco. Seu irreduzível apoio e dedicação ao presente projeto foram de suma importância à construção de um texto coeso, claro e correto;
- ao professor Jomar Gozzi, pelo seu empenho didático, sua preocupação com os alunos e pela sua imensa boa vontade;
- ao professor Fernando Lizarralde, pelos 3 cursos dos quais fui aluno e por saber como dosar humor e seriedade;
- aos demais professores do departamento, aos quais reitero grande parcela do meu conhecimento;
- ao amigo Marcello Artimos Neves, que me ajudou a formar uma mente matemática ao longo destes 5 anos;
- a todos meus outros amigos e à minha namorada Ana por todo o apoio e ajuda recebida nesta jornada de meia década.

Resumo

Propomos um método analítico para construção de observadores de ordem completa e mínima para sistemas descritores regulares (chamados também de sistemas parcialmente dinâmicos) análogo ao método de Luenberger. O procedimento baseia-se na solução completa do sistema descritor e uma detalhada e didática introdução aos conceitos básicos destes sistemas é apresentada. Introduzimos os subespaços generalizados \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* e evidenciamos sua importância na solução e compreensão dos sistemas descritores. Expomos a solução analítica para os casos homogêneo e completo, esta última descrita como uma extensão dos resultados de DIAS e MESQUITA [1] em uma forma fechada e inédita. Estudamos ainda a observabilidade dos sistemas descritores e, antes de abordarmos os observadores para sistemas descritores, incluímos um resumo do conceito de observador (ordem completa e mínima) para os tradicionais sistemas totalmente dinâmicos.

Palavras-Chave

Sistemas Descritores Regulares

Observadores de Estados

Sistemas Parcialmente Dinâmicos

Subespaços Invariantes

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Palavras-Chave	iv
Sumário	v
1 Introdução aos Sistemas Descritores	1
2 Subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_*	4
2.1 Subespaços Invariantes	4
2.1.1 A - Invariância	4
2.1.2 (A, T) - Invariância	5
2.1.3 (T, A) - Invariância	6
2.2 Polinômio Característico do Par (T, A)	9
2.3 Sistemas Descritores Regulares	10
2.4 Forma Canônica de um Sistema Descritor	11
2.5 Cálculo Direto dos Subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_*	13
3 Solução do Sistema Descritor	16
3.1 Solução do Sistema Descritor Homogêneo	16
3.2 Condições Iniciais Consistentes	17
3.3 Solução Completa do Sistema Descritor	18
3.4 Solução Não-Impulsiva	24
4 Observador para o Sistema Descritor	28
4.1 O Observador de Luenberger	28

4.1.1	Observador de Ordem Completa	28
4.1.2	Observador de Ordem Mínima	30
4.2	Observabilidade do Sistema Descritor	32
4.3	Observador para o Sistema Descritor	34
4.3.1	Observador de Ordem Completa	34
4.3.2	Observador de Ordem Mínima	36
5	Conclusões	47
	Referências Bibliográficas	48

Capítulo 1

Introdução aos Sistemas Descritores

Sistemas descritores são caracterizados por um sistema de equações algébrico-diferenciais que assumem a seguinte forma no espaço de estados:

$$\begin{cases} T \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \\ x(0^-) = x_0, \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

onde $x(t)$ é um vetor de n variáveis de estados, $u(t)$ um vetor de m entradas e $y(t)$ um vetor de r saídas.

Os vetores $x(t)$, $y(t)$ e $u(t)$ pertencem, respectivamente, aos espaços vetoriais \mathcal{X} , \mathcal{Y} e \mathcal{U} (definidos em \mathbb{R} , o corpo dos reais), enquanto que T , A , B e C são representações matriciais das transformações lineares e invariantes no tempo $A, T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ e $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ em bases definidas pela escolha dos estados e entradas do sistema.

Temos sempre $\text{posto}(T) = p < n$, caso contrário poderíamos definir novas matrizes A e B eliminando T e recaindo no caso mais convencional (puramente dinâmico). Teremos então $(n - p)$ equações puramente algébricas e p equações diferenciais. Surgirão, portanto, alguns fenômenos bastante distintos daqueles encontrados em sistemas puramente dinâmicos. Entre os aspectos distintos dos sistemas descritores, podemos mencionar:

- A função de transferência do sistema, dada por $H(s) = C(sT - A)^{-1}B$, não é sempre estritamente própria, podendo ser decomposta em uma soma de uma parte polinomial $H_1(s)$ com uma parte estritamente própria $H_2(s)$;
- A singularidade de T implica em $\text{grau}(\det(sT - A)) = l \leq p < n$. Desta forma, somente l pólos são finitos, enquanto os outros $(n - l)$ pólos estão associados à parte dinâmica

infinita ou à parte estática;

- A resposta livre do sistema apresenta modos exponenciais em l frequências finitas, além de $(p - l)$ modos impulsivos;
- As condições iniciais não são arbitrárias, estando limitadas aos p graus de liberdade do sistema.

Uma ressalva importante é que diversos sistemas físicos (lineares e invariantes no tempo) não podem ser modelados pelo tradicional sistema de equações onde $T = I_{n \times n}$. Isto é decorrente do fato de tais sistemas serem naturalmente modelados por sistemas descritores. Ademais, o tratamento convencional limita-se apenas aos sistemas causais, enquanto que o modelo descritor pode ser estendido à sistemas não-causais. Em alguns casos, isto pode ser uma vantagem.

Explicitamente, algumas das aplicações dos sistemas descritores são (para referências diretas, vide AZEVEDO Jr. [2]):

- ANÁLISE DE SISTEMAS DE GRANDE PORTE \Rightarrow sistemas obtidos pela interconexão de subsistemas independentes requerem a formulação descritora para descrever mais precisamente a física das conexões. Sistemas de potência interconectados se encaixam neste caso;
- SISTEMAS ECONÔMICOS \Rightarrow um exemplo clássico de sistema descritor discreto no tempo é o modelo de *Leontieff*, que mostra o comportamento dinâmico de uma economia multisetorial;
- SISTEMAS BIOLÓGICOS \Rightarrow um exemplo de sistema descritor contínuo no tempo é o modelo de *Leslie* que trata da questão do crescimento populacional;
- CIRCUITOS ATIVOS \Rightarrow a utilização de variáveis de estados em circuitos lineares com fontes controladas leva naturalmente a modelos descritores;
- SISTEMAS DE POTÊNCIA \Rightarrow equações algébrico-diferenciais surgem ao se modelar o regime transitório;
- CONTROLADORES PID \Rightarrow sistemas descritores decorrem imediatamente de realimentações de estado derivativas;

- ROBÓTICA \Rightarrow no controle de posicionamento de manipuladores robóticos surgem modelos descritores;
- MECÂNICA \Rightarrow em sistemas cujos vínculos não satisfazem a Condição Hessiana, a Lagrangeana assume a forma descritora;
- REGULADORES \Rightarrow sistemas descritores aparecem ainda no problema do regulador quadrático linear quando se utilizam matrizes singulares no funcional de custo.

O estudo da controlabilidade e da observabilidade de sistemas descritores foi feito por YIP e SINCOVEC [3], onde se utiliza uma forma canônica para o sistema descritor. COBB [4] estuda a controlabilidade do sistema sobre a mesma abordagem, e trata do problema da eliminação de impulsos utilizando realimentação de estados.

Um novo procedimento para o cálculo da solução de sistemas descritores contínuos regulares, baseado no conceito da inversa generalizada de *Moore - Penrose*, foi estabelecida por DIAS e MESQUITA [1]. Em [5] é tratada a questão da observabilidade de sistemas descritores causais.

Finalmente, a singularidade da matriz T pode decorrer de:

- falha de um componente em sistemas de grande porte;
- chaveamento de condições iniciais;
- idealizações de sistemas de grande porte;
- identificação do sistema.

Capítulo 2

Subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_*

2.1 Subespaços Invariantes

A Teoria da Invariância é de grande importância ao estudo da estrutura e das propriedades de sistemas lineares parcialmente dinâmicos pois representa características puramente geométricas destes sistemas. Segundo WONHAM [6], a abordagem geométrica de diversos problemas de controle nos conduz sempre ao mesmo conceito fundamental de invariância. Este capítulo é fortemente baseado no texto de AZEVEDO Jr. [2].

Conforme mencionado anteriormente, o sistema de equações fundamental de um sistema descritor linear homogêneo e invariante no tempo tem sua representação no espaço de estados dada por:

$$\begin{cases} T \dot{x}(t) = A x(t) \\ y(t) = C x(t) \\ x(0^-) = x_0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $A, T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ são transformações lineares, $\dim(X) = n$ e $\text{posto}(T) = p < n$.

Em todo este trabalho, denotaremos por $\text{nul}(\cdot)$ e $\text{im}(\cdot)$ o espaço nulo e o conjunto imagem de uma transformação linear (e de sua matriz correspondente). Estes e outros conceitos de álgebra linear envolvendo espaços vetoriais e transformações lineares são imprescindíveis a este trabalho. Uma abordagem rigorosa, mas de grande clareza, encontra-se em [7].

2.1.1 A - Invariância

Definição 2.1 *Seja $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ uma transformação linear. Um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ é dito A - invariante se, e somente se, $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.*

O conceito de A - invariância desempenha importante papel na caracterização das propriedades de sistemas do tipo $\dot{x} = Ax(t)$; $x(0) = x_0$.

Definição 2.2 *Seja \mathcal{D} uma classe de subespaços de \mathcal{X} . Um subespaço $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ é dito elemento maximal da classe \mathcal{D} se, e somente se, $\mathcal{W}_{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$, $\forall \mathcal{W} \in \mathcal{D}$.*

Escreveremos então: $\mathcal{W}_{\mathcal{M}} = \sup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathcal{D}\}$. Muitas vezes uma classe possui mais de um elemento maximal. O lema abaixo mostra uma condição suficiente para a unicidade de um elemento maximal.

Lema 2.1 *Se \mathcal{D} é uma classe de subespaços de um subespaço \mathcal{X} , não vazia e fechada em relação à adição de subespaços, então \mathcal{D} possui um elemento maximal único.*

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

2.1.2 (A, T) - Invariância

Definição 2.3 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ é dito (A, T) - invariante se, e somente se, $A\mathcal{V} \subset T\mathcal{V}$.*

Este conceito é uma extensão natural do conceito anterior para sistemas parcialmente dinâmicos. A classe de subespaços (A, T) - invariantes de \mathcal{X} é denotada por $\underline{\mathcal{Z}}(A, T; \mathcal{X})$. Desta forma, temos:

$$\underline{\mathcal{Z}}(A, T; \mathcal{X}) = \{\mathcal{W} \subset \mathcal{X} \mid A\mathcal{W} \subset T\mathcal{W}\}.$$

Esta classe é não-vazia e fechada em relação à adição de subespaços e, pelo lema 2.1, concluímos que ela possui um elemento maximal único, que será denotado por \mathcal{Z}^* . Assim, $\mathcal{Z}^* = \sup \underline{\mathcal{Z}}(A, T; \mathcal{X})$. Este subespaço pode ser calculado em um número finito de passos com o algoritmo dado no teorema a seguir.

Teorema 2.1 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Então, a seqüência de subespaços definida por:*

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_0 = \mathcal{X} \\ \mathcal{Z}_\mu = A^{-1}(T\mathcal{Z}_{\mu-1}), \quad \mu = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

com $A^{-1}(T\mathcal{Z}_{\mu-1}) \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid Ax \in T\mathcal{Z}_{\mu-1}\}$,¹ é convergente e seu limite é dado por \mathcal{Z}^* .

¹Não confundir A^{-1} na expressão $A^{-1}(\cdot)$ da (2.2) com a inversa de A . Somente quando $\det(A) \neq 0$ tem-se A^{-1} como a inversa de A . Note que $A^{-1}(\cdot)$ sempre existe.

Prova Se $\mathcal{Z}_\mu \subset \mathcal{Z}_{\mu-1}$, então $\mathcal{Z}_{\mu+1} = A^{-1}(T\mathcal{Z}_\mu) \subset A^{-1}(T\mathcal{Z}_{\mu-1}) = \mathcal{Z}_\mu$. Portanto, a seqüência $\mathcal{Z}_0 \supset \mathcal{Z}_1 \supset \mathcal{Z}_2 \dots$ é monótona não crescente (*).

Note agora que se \mathcal{Z}_ν não for um subespaço (A, T) - invariante, então $\exists x \in \mathcal{Z}_\nu \mid Ax \notin T\mathcal{Z}_\nu$, de modo que $\mathcal{Z}_{\nu+1} \neq \mathcal{Z}_\nu$ (pela definição da seqüência). Como $\mathcal{Z}_{\nu+1} \subset \mathcal{Z}_\nu$, conclui-se que $\dim(\mathcal{Z}_{\nu+1}) < \dim(\mathcal{Z}_\nu)$. No entanto, se \mathcal{Z}_ρ for (A, T) - invariante, então $A\mathcal{Z}_\rho \subset T\mathcal{Z}_\rho$ garante que se $x \in \mathcal{Z}_\rho$, então $Ax \in T\mathcal{Z}_\rho \therefore x \in \mathcal{Z}_{\rho+1}$. Logo, $\mathcal{Z}_\rho \subset \mathcal{Z}_{\rho+1}$. Usando (*), percebemos que $\mathcal{Z}_\rho = \mathcal{Z}_{\rho+1}$. Conclusão: a seqüência converge para $\mathcal{Z}^* = \sup \underline{\mathcal{Z}}(A, T; \mathcal{X})$ em um número de passos $\rho \leq n = \dim(\mathcal{X})$.

c.q.d.

O subespaço generalizado \mathcal{Z}^* , definido desta forma, é o subespaço dos modos não-impulsivos do sistema descritor linear homogêneo, representado por (2.1). Tal subespaço está intimamente relacionado à parte dinâmica do sistema e, como mostraremos adiante, é nele que se situam as condições iniciais consistentes.

2.1.3 (T, A) - Invariância

Definição 2.4 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ é dito (T, A) - invariante se, e somente se, $T\mathcal{V} \subset A\mathcal{V}$.*

A classe de subespaços (T, A) - invariantes de \mathcal{X} é denotada por $\underline{H}(A, T; \mathcal{X})$. Assim,

$$\underline{H}(A, T; \mathcal{X}) = \{\mathcal{W} \subset \mathcal{X} \mid T\mathcal{W} \subset A\mathcal{W}\}.$$

Analogamente a \mathcal{Z}^* , há um elemento maximal único \mathcal{H}^* desta classe. Este elemento, entretanto, não desempenha um papel importante no estudo dos sistemas lineares parcialmente dinâmicos. O elemento de real importância é aquele ao qual converge a seqüência \mathcal{H}_μ , $\mu = 0, 1, \dots, \infty$, definida abaixo. Este subespaço será denotado por \mathcal{H}_* .

Teorema 2.2 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Então, a seqüência de subespaços definida por:*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 = \{0\} \\ \mathcal{H}_\mu = T^{-1}(A\mathcal{H}_{\mu-1}), \quad \mu = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.3)$$

com $T^{-1}(A\mathcal{H}_{\mu-1}) = \{x \in \mathcal{X} \mid Tx \in A\mathcal{H}_{\mu-1}\}$, é convergente e seu limite é dado por $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{H}^*$.

Prova Vide SILVA [8].

É importante frisar que, enquanto o subespaço \mathcal{Z}^* é o primeiro (A, T) - invariante da seqüência definida por (2.2), todos os subespaços obtidos na cadeia (2.3) são (T, A) - invariantes. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = \{0\} &\Rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ é } (T, A) \text{ - invariante;} \\ \mathcal{H}_1 = T^{-1}(A\mathcal{H}_0) &\Rightarrow \mathcal{H}_1 = \text{nul}(T); \\ \therefore T\mathcal{H}_1 = 0 \subset A\mathcal{H}_1 &\Rightarrow \mathcal{H}_1 \text{ é } (T, A) \text{ - invariante;} \\ \mathcal{H}_\mu = T^{-1}(A\mathcal{H}_{\mu-1}) &\Rightarrow T\mathcal{H}_\mu \subset A\mathcal{H}_{\mu-1} \subset A\mathcal{H}_\mu \text{ (pois } \mathcal{H}_{\mu-1} \subset \mathcal{H}_\mu); \\ \therefore T\mathcal{H}_\mu \subset A\mathcal{H}_\mu &\Rightarrow \mathcal{H}_\mu \text{ é } (T, A) \text{ - invariante.} \end{aligned}$$

O subespaço \mathcal{H}_* está diretamente relacionado às partes impulsiva e/ou estática da solução do sistema (2.1), assim como à sua estrutura de zeros no infinito.

Exemplo 2.1

Seja o sistema descritor homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t).$$

É fácil perceber que $\det(A) \neq 0$. Logo, A^{-1} na (2.2) equivale a própria inversa de A e o cálculo de \mathcal{Z}^* é imediato: ²

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= A^{-1}(T\mathcal{X}) \\ &= \mathbb{R} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

²Aqui, $\mathbb{R}[\cdot]$ simboliza a **varredura** (em inglês, **span**) dos vetores de base no corpo dos reais. Uma matriz caracteriza os vetores de base de um subespaço, e o subespaço propriamente dito é dado pelo conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de base com coeficientes, no caso, reais; sucintamente, um subespaço é dado pela varredura dos seus vetores de base.

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{R} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -5 \\ \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \\
&\therefore \text{nul}(\mathcal{Z}_1) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_2 &= A^{-1}(T \mathcal{Z}_1) \\
&= \mathbb{R} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -5 \\ \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{42}{5} \\ \frac{5}{2} & 20 \\ \frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{1}{5} & \frac{28}{5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Não é difícil perceber que os vetores de base de \mathcal{Z}_2 são combinações lineares dos de \mathcal{Z}_1 , de modo que $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}^*$. Um método simples de se verificar a igualdade de subespaços é comparando seus espaços nulos. De fato,

$$\therefore \text{nul}(\mathcal{Z}_2) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{nul}(\mathcal{Z}_1).$$

O cálculo de \mathcal{H}_* não é tão simples, pois na (2.3) T^{-1} não é a inversa de T . Isto dificulta o tratamento em programas de cálculo simbólico (*Mathematica*[®], *Maple*[®], etc.). Felizmente, como são apenas 4 estados, podemos proceder o cálculo sem auxílio eletrônico:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= \text{nul}(T) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
A\mathcal{H}_1 &= \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathbb{R} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Queremos encontrar os vetores x tais que $Tx \in A\mathcal{H}_1$. Isto é, vetores que sejam levados no plano definido por v_1 e v_2 . Para um vetor genérico temos:

$$T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2b - c \\ -2a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Não há combinação linear de v_1 e v_2 que resulte em tal vetor. Ou seja, $a = 0$ e $b - 2c = 0 \rightarrow b = 2c$. A componente d é obviamente livre. Se o leitor não se convenceu, basta notar que o fato de Tx ter a última componente $\equiv 0$ nos mostra que entre os vetores Tx levados no plano definido por v_1 e v_2 , nenhum possui componente ao longo de v_2 . Mas a estrutura de v_1 obriga a 3ª componente a ser 8 vezes a 1ª, o que só é satisfeito quando $a = 0$. Assim, temos:

$$\mathcal{H}_2 = T^{-1}(A\mathcal{H}_1) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_* .$$

2.2 Polinômio Característico do Par (T, A)

Iremos agora estender os conceitos de polinômio característico e espectro de uma transformação linear genérica A de \mathcal{X} em \mathcal{X} para os de um par (T, A) de transformações lineares também de \mathcal{X} em \mathcal{X} (uma exposição mais detalhada é dada por SILVA [8]).

Definição 2.5 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Então, o polinômio $\varphi(s) = \det(sT - A)$ é chamado de polinômio característico do par (T, A) .*

Definição 2.6 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Um vetor $v \in \mathcal{X}$, $v \neq 0$, será denominado autovetor do par (T, A) se, e somente se, $\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid Av = \lambda Tv$. Tal número complexo λ , se existir, é chamado autovalor do par (T, A) associado ao autovetor v .*

Definição 2.7 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares e $\varphi(s)$ o polinômio característico do par (T, A) . Então, o conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi(\lambda) = 0\}$ é chamado de espectro do par (T, A) , sendo denotado por $\sigma(T, A)$.*

O lema abaixo relaciona os autovetores e autovalores do par (T, A) com o subespaço generalizado \mathcal{Z}^* .

Lema 2.2 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares e \mathcal{Z}^* o subespaço $\sup \underline{Z}(A, T; \mathcal{X})$. Se existirem $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathcal{X}$ tais que $Av = \lambda Tv$, então $v \in \mathcal{Z}^*$.*

Prova Iremos demonstrar o lema por indução finita. Assim, se $v \in \mathcal{Z}_\mu$, como $Av = \lambda Tv$, concluímos que $Av \in T\mathcal{Z}_\mu$, donde concluímos que $v \in A^{-1}(T\mathcal{Z}_\mu) = \mathcal{Z}_{\mu+1}$. Como obviamente $v \in \mathcal{Z}_0$, e como a cadeia \mathcal{Z}_μ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$) converge para \mathcal{Z}^* , segue que $v \in \mathcal{Z}^*$.

c.q.d.

2.3 Sistemas Descritores Regulares

Iremos introduzir agora o conceito de regularidade de um feixe de matrizes. Daqui por diante, salvo menção em contrário, consideraremos apenas sistemas descritores regulares.

Definição 2.8 *Seja $\mathbb{R}[s]$ o anel de polinômios sobre o corpo \mathbb{R} . O par (T, A) é dito regular se, e somente se, $\varphi(s) = \det(sT - A) \neq 0$ sobre o anel $\mathbb{R}[s]$.*

Quando o grau do polinômio $\varphi(s)$ é superior a 1, o par (T, A) é dito estritamente regular.

Lema 2.3 *As afirmações a seguir são equivalentes:*

- (i) *O feixe de matrizes $(sT - A)$ é regular;*
- (ii) $\text{nul}(T) \cap \mathcal{Z}^* = \{0\}$;
- (iii) $\mathcal{Z}^* \oplus \mathcal{H}_* = \mathcal{X}$; ($\oplus \leftrightarrow$ soma direta)
- (iv) *A solução da eq.(2.1) é única.*

Prova Vide ARMENTANO [9].

Um sistema descritor linear regular apresenta portanto uma única solução, ao passo que um sistema descritor linear singular possui infinitas soluções.

2.4 Forma Canônica de um Sistema Descritor

Iremos agora decompor a estrutura do sistema descritor (2.1) de modo a evidenciar a influência dos subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* tanto nas propriedades estruturais como na própria solução do sistema.

Sejam os mapas de inserção (também chamados de mapas de inclusão) V e H definidos assim: $V : \mathcal{Z}^* \rightarrow \mathcal{X}$ e $H : \mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{X}$. Sejam também $n = \dim(\mathcal{X})$ e $l = \dim(\mathcal{Z}^*)$ ³. Então, com base no lema 2.3, podemos escolher como bases para o domínio e contradomínio as matrizes P e Q definidas abaixo:

$$P = [V \mid H] \quad \text{e} \quad Q = [TV \mid AH].$$

Fazendo a mudança de variáveis: $x(t) = P\bar{x}(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} T\dot{x}(t) = Ax(t) &\Rightarrow TP\dot{\bar{x}}(t) = AP\bar{x}(t) \Rightarrow Q^{-1}TP\dot{\bar{x}} = Q^{-1}AP\bar{x}(t) \Rightarrow \bar{T}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) \\ y(t) = Cx(t) &= CP\bar{x}(t) \Rightarrow y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned}$$

onde foram definidas:

$$\bar{T} = Q^{-1}TP, \quad \bar{A} = Q^{-1}AP \quad \text{e} \quad \bar{C} = CP. \quad (2.4)$$

Uma vez que $T\mathcal{H}_* \subset A\mathcal{H}_*$, então

$$\exists T_h \mid TH = AHT_h \quad (2.5)$$

e uma vez que $A\mathcal{Z}^* \subset T\mathcal{Z}^*$, então

$$\exists A_z \mid AV = TVA_z. \quad (2.6)$$

Assim, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} TP = Q\bar{T} \Rightarrow T[V \mid H] = [TV \mid AH] \left[\begin{array}{c|c} I_l & 0 \\ \hline 0 & T_h \end{array} \right]; \\ AP = Q\bar{A} \Rightarrow A[V \mid H] = [TV \mid AH] \left[\begin{array}{c|c} A_z & 0 \\ \hline 0 & I_{n-l} \end{array} \right]; \\ \bar{C} = CP = C[V \mid H] = [CV \mid CH]. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

³de acordo com a notação utilizada no Cap.1

Colocamos então o sistema na forma canônica, a saber:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{c|c} I_l & 0 \\ \hline 0 & T_h \end{array} \right] \dot{\bar{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} A_z & 0 \\ \hline 0 & I_{n-l} \end{array} \right] \bar{x}(t); \\ y(t) = [CV \mid CH] \bar{x}(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

A (2.8) representa uma decomposição do sistema original em dois subsistemas desacoplados; um dinâmico, o outro algébrico:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = A_z \bar{x}_1(t); \\ T_h \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_2(t). \end{cases} \quad (2.9)$$

Fica portanto evidente que o comportamento dinâmico do sistema está restrito ao subespaço \mathcal{Z}^* e que \mathcal{H}_* engloba o comportamento estático do mesmo.

Lema 2.4 *Uma matriz $A_{n \times n}$ é **nilpotente** de ordem $k \geq 1$ (isto é, $A^k \equiv 0$ mas $A^{k-1} \neq 0$) se, e somente se, $\det(sA - I_n) = cte \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}$.*

Lema 2.5 *A matriz T_h na (2.9) é nilpotente de ordem k .*

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

A solução do sistema (2.9) sai imediatamente resolvendo-se independentemente ambas as equações. A primeira nos dá como solução: $\bar{x}_1(t) = e^{A_z t} \bar{x}_1(0^-)$. A segunda, aplicando-se a Transformada de Laplace, resulta: $(sT_h - I_{n-l}) \bar{X}_2(s) = T_h \bar{x}_2(0^-)$. Desta forma, obtemos: $\bar{X}_2(s) = (sT_h - I_{n-l})^{-1} T_h \bar{x}_2(0^-)$.

Lembrando que T_h é nilpotente de ordem k , podemos calcular a inversa $(sT_h - I_{n-l})^{-1}$ da seguinte forma:⁴

$$(sT_h - I_{n-l})^{-1} = - \left(I_{n-l} + sT_h + \dots + s^{k-1} (T_h)^{k-1} \right). \quad (2.10)$$

Daí, a segunda das (2.9) aceitará como solução:

$$\bar{x}_2(t) = - \left(\delta(t) + \delta^{[1]}(t) T_h + \dots + \delta^{[k-1]}(t) (T_h)^{k-1} \right) T_h \bar{x}_2(0^-). \quad (2.11)$$

onde:

$$\begin{cases} \delta(t) \rightarrow \text{função Delta de Dirac (impulso)}; \\ \delta^{[i]}(t) \rightarrow i - \text{ésima derivada da Delta de Dirac.} \end{cases}$$

⁴Resultado inteiramente análogo à expansão $\frac{1}{1-x} \stackrel{|x|<1}{=} 1 + x + x^2 + \dots$

2.5 Cálculo Direto dos Subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_*

Embora já saibamos como obter os subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* , ainda não obtemos um método direto para fazê-lo. As (2.2) e (2.3) são computacionalmente instáveis, não tendo muita utilidade prática. Motivados por este inconveniente, encontraremos um operador a partir do qual se obtenha diretamente ambos subespaços. Começemos então por um lema, que será útil logo mais (lembrando que $\text{im}(\cdot)$ denota a imagem de uma matriz).

Lema 2.6 *Se uma matriz A é **idempotente** (ou seja, $A^2 = A$), então valem as relações:*
(i) $\text{im}(A) = \text{nul}(I - A)$ e (ii) $\text{nul}(A) = \text{im}(I - A)$.

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

Aplicando a Transformada de Laplace ao sistema descritor homogêneo obtemos:

$$\begin{aligned} sTX(s) - Tx_0 &= AX(s) \Rightarrow (sT - A)X(s) = Tx_0 \\ \therefore X(s) &= (sT - A)^{-1}Tx_0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Esta equação encoraja uma nova definição:

Definição 2.9 *Dado o sistema descritor (2.1), a matriz de transferência racional $G(s)$ é definida como:*

$$G(s) = (sT - A)^{-1}T. \tag{2.13}$$

Tal matriz possui uma parte estritamente própria e outra polinomial. Podemos então subdividir $G(s)$ em duas:

$$G(s) = G_{pol}(s) + G_{ep}(s), \tag{2.14}$$

onde $G_{pol}(s)$ é a parcela polinomial e $G_{ep}(s)$ a parcela estritamente própria.

Encontraremos agora um importante operador a partir de $G_{ep}(s)$. Invocando o teorema do valor final, obtemos:

$$g_{ep}(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sG_{ep}(s). \tag{2.15}$$

É a partir deste operador que iremos obter os subespaços generalizados \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* . Uma importante propriedade de $g_{ep}(0)$ é a sua idempotência, conforme o próximo teorema.

Teorema 2.3 *O operador $g_{ep}(0)$ é idempotente.*

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

Agora somente dois teoremas nos separam do resultado final.

Teorema 2.4 *O subespaço generalizado \mathcal{Z}^* , que caracteriza o conjunto das condições iniciais consistentes, pode ser escrito como:*

$$\mathcal{Z}^* = \text{nul}(I - g_{ep}(0)). \quad (2.16)$$

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

Desta forma, obtemos o subespaço \mathcal{Z}^* diretamente a partir de $g_{ep}(0)$, que por sua vez é obtido diretamente pela matriz de transferência $G(s) = (sT - A)^{-1}T$. Mostraremos agora que o mesmo acontece no cálculo de \mathcal{H}_* .

Teorema 2.5 *O subespaço generalizado \mathcal{H}_* pode ser escrito como:*

$$\mathcal{H}_* = \text{im}(I - g_{ep}(0)). \quad (2.17)$$

Prova Este resultado segue imediatamente do item (iii) do lema 2.3 e do teorema anterior.

c.q.d.

Finalmente, utilizando a propriedade de idempotência de $g_{ep}(0)$ e o lema 2.6, podemos simplificar ainda mais as fórmulas (2.16) e (2.17).

Corolário 2.1 *Os subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* podem ser escritos como:*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Z}^* &= \text{im}(g_{ep}(0)); \\ \mathcal{H}_* &= \text{nul}(g_{ep}(0)). \end{aligned}} \quad (2.18)$$

Exemplo 2.2

Seja o sistema descritor homogêneo descrito no exemplo 2.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t).$$

Note que $\det(sT - A) = -18s^2 + 28s + 20$ e, portanto, o sistema é regular.

$$G(s) = (sT - A)^{-1}T = \frac{1}{9s^2 - 14s - 10} \begin{bmatrix} 9s + 6 & 12 & 6 & 0 \\ 5s & -12s + 20 & -6s + 10 & 0 \\ 10s + 5 & 6s & 3s & 0 \\ 6s + 4 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos que $G(s)$ já é estritamente própria; basta tomar o limite:

$$g_{ep}(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s G_{ep}(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{10}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concluimos imediatamente que:

$$\mathcal{H}_\star = \text{nul}(g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}^\star = \text{nul}(I - g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estes são os mesmos resultados obtidos no exemplo 2.1, mas através de um método mais eficiente e adequado à computação simbólica.

Finalmente, podemos resumir em 4 passos o procedimento para a obtenção de \mathcal{Z}^\star e \mathcal{H}_\star a partir das matrizes T e A :

- 1) Calcular $G(s) = (sT - A)^{-1}T$;
- 2) Obter $G_{ep}(s)$, a parte estritamente própria de $G(s)$;
- 3) Calcular $g_{ep}(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s G_{ep}(s)$;
- 4) Obter $\mathcal{Z}^\star = \text{im}(g_{ep}(0))$ e $\mathcal{H}_\star = \text{nul}(g_{ep}(0))$.

Capítulo 3

Solução do Sistema Descritor

3.1 Solução do Sistema Descritor Homogêneo

Encontraremos agora a solução do sistema descritor homogêneo (2.1) através de uma abordagem direta, utilizando a inversa generalizada (ou pseudo-inversa à esquerda) de *Moore-Penrose* (este capítulo baseia-se principalmente em AZEVEDO Jr. [2] e DIAS [10]). A unicidade da solução é garantida pelo lema 2.3. A inversa generalizada é definida por:

$$V^g = (V^t V)^{-1} V^t. \quad (3.1)$$

Antes de proceder na solução do sistema homogêneo, lancemos mão de um lema importante:

Lema 3.1 *Sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares, com $\det(sT - A) \neq 0$, e seja V o operador de inserção definido por $V : \mathcal{Z}^* \rightarrow \mathcal{X}$. Então, $\text{nul}(TV) = \{0\}$.*

Prova Para V , como para qualquer mapa de inserção, temos $\text{nul}(V) = \{0\}$. Ademais, o lema 2.3 nos garante que $\text{nul}(T) \cap \mathcal{Z}^* = \{0\}$. Considere agora $x \in \text{nul}(TV)$ e $x \neq 0$. Então $T(V(x)) = 0 \therefore V(x) \notin \mathcal{Z}^*$, pois $x \neq 0$. Mas $\text{im}(V) \subset \mathcal{Z}^*$, o que é uma contradição. Portanto, $\text{nul}(TV) = \{0\}$.

c.q.d.

Agora estamos prontos para obter a solução do sistema (2.1). Suponha então que o vetor de estados $x(t)$ possa ser escrito como $x(t) = V f(t)$ para $t > 0$, onde $f(t)$ é um vetor função de l componentes a ser determinado. Daí, $\dot{x}(t) = V \dot{f}(t) \Rightarrow T \dot{x}(t) = TV \dot{f}(t)$. Mas

$T \dot{x}(t) = A x(t)$, de modo que

$$TV \dot{f}(t) = A x(t) = AV f(t).$$

A equação (2.6) afirma que $AV = TV A_z$. Logo, podemos escrever:

$$TV \left(\dot{f}(t) - A_z f(t) \right) = 0$$

$$\therefore \left(\dot{f}(t) - A_z f(t) \right) \subset \text{nul}(TV) \stackrel{\text{lema 3.1}}{=} \{0\}.$$

$$\therefore f(t) = e^{A_z t} f(0) \text{ e portanto } x(t) = V e^{A_z t} f(0) \quad (t > 0)$$

Em particular, $x(0^-) = V f(0)$, o que implica em $f(0) = V^g x(0^-)$. Assim, podemos finalmente concluir que a solução homogênea do sistema descritor é:

$$\boxed{x(t) = V e^{A_z t} V^g x(0^-), \quad t > 0.} \quad (3.2)$$

Como meio de verificação, podemos calcular $T \dot{x}(t)$ e verificar que o resultado satisfaz a (2.1) (lembrando que $TV A_z = AV$):

$$T \dot{x}(t) = T V A_z e^{A_z t} V^g x(0^-) = A V e^{A_z t} V^g x(0^-) = A x(t).$$

Aqui vale uma observação. Pela definição de V^g , tem-se $V^g V = I_l$, mas em geral $V V^g \neq I_n$. A extensão da solução (3.2) para incluir o ponto $t = 0$ exige, entretanto, que $x(0^-) = V V^g x(0^-)$. Isto nem sempre ocorre, o que nos leva a investigar o conjunto de condições iniciais para o qual esta igualdade é verdadeira.

3.2 Condições Iniciais Consistentes

Uma importante classe de condições iniciais ao estudo dos sistemas descritores é a das condições iniciais consistentes, que está intimamente relacionada ao subespaço Z^* .

Definição 3.1 *Uma condição inicial qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ aplicada a um sistema descritor regular homogêneo definido pela (2.1) é dita consistente se, e somente se:*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x_0. \quad (3.3)$$

A solução do sistema descritor homogêneo para uma condição inicial não-consistente satisfaz $T \dot{x}(t) = A x(t)$ para $t > 0$, mas implica em $x(0^-) \neq x(0^+)$.

Lema 3.2 *Uma condição inicial qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ aplicada a um sistema descritor regular definido pela (2.1) é consistente se, e somente se, $x_0 \in \mathcal{Z}^*$.*

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

Este lema identifica o subespaço generalizado \mathcal{Z}^* como sendo o subespaço das condições iniciais consistentes e nos permite simplificar a solução homogênea do sistema descritor regular.

Teorema 3.1 *A solução do sistema (2.1) para uma condição inicial consistente $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ é dada por:*

$$x(t) = e^{V A_z V^g t} x_0, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

Prova Vide AZEVEDO Jr. [2].

Esta forma, no entanto, não possui grande utilidade prática por aumentar a complexidade da exponencial, piorando o desempenho numérico. Sua utilidade resume-se a demonstrações analíticas.

3.3 Solução Completa do Sistema Descritor

Estamos prontos para obter a solução completa do sistema descritor regular. Para tal, iremos como de costume propor como solução uma extensão da solução homogênea.

A afirmação (ii) do lema 2.3 garante que $[TV | AH]$ é uma base para todo o espaço \mathcal{X} . Assim, podemos escrever:

$$B = TVB_z + AHB_h \quad (3.5)$$

É sabido também que uma solução consistente da eq.(1.1) exige, no caso geral, que o vetor de entradas $u(t) \in C^k$ (classe de funções continuamente deriváveis até ordem k). Desta maneira, a solução proposta para a (1.1) tem a forma

$$x(t) = Vf(t) + J_0 u(t) + J_1 \dot{u}(t) + \dots + J_{p-1} u^{[k-1]}(t)$$

conforme o teorema abaixo:

Teorema 3.2 A solução do sistema (1.1) é dada por

$$\boxed{x(t) = Vf(t) + \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t),} \quad (3.6)$$

com a função vetor $f(t)$ satisfazendo a

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = A_z f(t) + B_z u(t) \\ f(0) = V^g x(0^-) \end{cases} \quad (3.7)$$

e as matrizes-coeficientes J_i dadas por:

$$J_i = -H (T_h)^i B_h. \quad (3.8)$$

Prova Demonstraremos que uma escolha apropriada das matrizes-coeficientes J_i permite que a (3.6) seja solução do sistema descritor completo desde que a (3.7) seja satisfeita:

$$\begin{aligned} T \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \therefore T [V \dot{f} + J_0 \dot{u} + J_1 \ddot{u} + \dots] &= AV f + AJ_0 u + AJ_1 \dot{u} + AJ_2 \ddot{u} + \dots + Bu. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo, pela (3.5) temos:

$$B = [TV \mid AH] \left[\begin{array}{c} \left. \frac{B_z}{B_h} \right\} l \times m \\ \left. \right\} (n-l) \times m \end{array} \right].$$

Definindo-se

$$J_0 \triangleq -H B_h, \quad (3.10)$$

concluimos que

$$(AJ_0 + B)u = (AJ_0 + B - TV B_z)u + TV B_z u = TV B_z u.$$

E por ser $u(t)$ arbitrário:

$$\begin{cases} TV \dot{f}(t) = AV f(t) + TV B_z; \\ AJ_1 = T J_0; \\ AJ_2 = T J_1; \\ \vdots \\ T J_{k-1} = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde a existência dos J_i ($i > 0$) está garantida pelo fato de que $TJ_i \in \text{im}(A)$. De fato, por ser $TH = AHT_h$ (cf. eq.(2.5)) temos:

$$\begin{aligned} TJ_0 &= -THB_h = A \overbrace{(-HT_h B_h)}^{J_1} \in \text{im}(A); \\ TJ_1 &= T(-HT_h B_h) = A \overbrace{(-H(T_h)^2 B_h)}^{J_2} \in \text{im}(A); \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad J_2 \qquad \qquad \qquad . \end{aligned}$$

O fato de T_h ser nilpotente de ordem k (note agora porque usamos a letra k acima) garante a finidade da seqüência. A última das (3.11) também será satisfeita, pois

$$TJ_{k-1} = -TH(T_h)^{k-1}B_h \stackrel{\text{eq.(2.5)}}{=} -AHT_h(T_h)^{k-1}B_h = 0.$$

Finalmente, pela (2.6) e por ser $\text{nul}(TV) = \{0\}$ (lema 3.1), a primeira das (3.11) resulta em:

$$TV[\dot{f}(t) - A_z f(t) - B_z] = 0 \Rightarrow \dot{f}(t) - A_z f(t) - B_z = 0.$$

c.q.d.

As $k - 1$ matrizes-coeficientes J_i são obtidas seqüencialmente através das equações (3.8), enquanto $f(t)$, por sua vez, é obtida resolvendo-se a (3.7). A matriz T_h , necessária ao cálculo das J_i , sai diretamente da (2.5) como $T_h = (AH)^g TH$.

O leitor pode se perguntar por que na (3.9) não se fez separadamente:

$$\begin{aligned} TV \dot{f}(t) &= AV f(t) \\ AJ_0 + B &= 0. \end{aligned}$$

De fato, a princípio poderíamos tê-lo feito e encontrado uma solução mais simples para $f(t)$. Há, entretanto, diversas condições restringindo a validade da solução encontrada desta forma. A primeira é imediata: se $\det(A) = 0$, então se $B \notin \text{im}(A)$, então $\nexists J_0 \mid AJ_0 + B = 0$. A segunda é que as matrizes-coeficiente J_i não conterão mais potências de T_h na sua forma, e podem ser necessárias infinitas delas para a solução do problema. Mas a hipótese inicial não previa esta possibilidade e de fato neste caso a solução deixa de ser única. Enfim, o único jeito deste procedimento fornecer uma solução válida ao sistema é a matriz $A^{-1}T$ ser nilpotente (cf. eq. 3.11), e há um teorema que afirma que isto só ocorre quando $\mathcal{Z}^* = \{0\}$. A solução proposta é, portanto, muito mais geral.

Esta solução foi originalmente proposta em DIAS e MESQUITA [1], mas ao custo de uma demonstração muito mais complexa.

Exemplo 3.1

Seja o sistema descritor não-homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ x(0^-) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^t; \\ u(t) = t \xi(t), \end{array} \right.$$

onde $\xi(t)$ é a função degrau unitário. Iremos obter a solução completa deste sistema de 5 estados. O sistema é regular, pois:

$$\det(sT - A) = 12s^3 + 41s^2 - 19s - 16.$$

A parte estritamente própria de sua matriz de transferência é dada por:

$$G_{ep}(s) = (sT - A)^{-1}T \Big|_{\text{parte e.p.}} = \frac{1}{12s^3 + 41s^2 - 19s - 16} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 9s - 12 & -18s + 12 & 9s - 6 & -18s^2 - 3s + 12 & -9s \\ 3s^2 - 19s + 20 & -6s^2 + 34s - 20 & 3s^2 - 17s + 10 & 49,5s^2 - 0,5s - 28 & -3s^2 + 15s \\ 30s^2 + 14s + 18 & -36s^2 + 46s + 6 & 18s^2 - 23s - 3 & 135s^2 - 25s - 50 & -6s^2 + 60s + 24 \\ -6s + 8 & 12s - 8 & -6s + 4 & 12s^2 + 2s - 8 & 6s \\ 12s^2 + 38s + 18 & 22s + 6 & -11s - 3 & 18s^2 + 8s - 2 & 12s^2 + 60s + 24 \end{bmatrix}.$$

Obtém-se então o operador $g_{ep}(0)$:

$$g_{ep}(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s G_{ep}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{33}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} & \frac{45}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Os subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* são:

$$\mathcal{Z}^* = \text{nul}(I - g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_* = \text{nul}(g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos então escrever o sistema na forma canônica. Lembrando que $P = [V \mid H]$ e $Q = [TV \mid AH]$, obtemos:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 10 & -\frac{2}{3} & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

As novas matrizes, $\bar{T} = Q^{-1}TP$ e $\bar{A} = Q^{-1}AP$, são:

$$\bar{T} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{23}{18} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{18} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{157}{36} & \frac{23}{4} & -\frac{169}{36} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

de onde extraímos as submatrizes A_z e T_h . Já para as submatrizes B_z e B_h , fazemos:

$$\begin{bmatrix} B_z \\ B_h \end{bmatrix} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{19}{24} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{415}{48} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{19}{4} \end{bmatrix}.$$

Como T_h é nilpotente de ordem 2, precisamos de duas matrizes-coeficientes: J_0 e J_1 .

$$J_0 = -HB_h = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{19}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_1 = -HT_hB_h = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para solucionar a (3.7) e encontrar $f(t)$, note que tal equação é inteiramente análoga a equação tradicional de $x(t)$ no espaço de estados. Sua solução é, portanto:

$$f(t) = e^{A_z t} f(0) + \int_0^t e^{A_z (t-\tau)} B_z u(\tau) d\tau.$$

Finalmente, obtemos $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= Vf(t) + J_0 u(t) + J_1 \dot{u}(t) \\ &\cong \begin{bmatrix} -0,23 + -0,60 e^{-3,74t} + 0,53 e^{-0,45t} + 0,31 e^{0,78t} \\ -0,86 + 1,75 e^{-3,74t} - 0,96 e^{-0,45t} - 0,43 e^{0,78t} \\ -4,55 + 5,1 e^{-3,74t} - 0,50 e^{-0,45t} - 2,9 e^{0,78t} \\ 0,16 + 0,40 e^{-3,74t} - 0,35 e^{-0,45t} - 0,20 e^{0,78t} \\ -3,05 - 0,58 e^{-3,74t} - 0,105 e^{-0,45t} - 3,4 e^{0,78t} \end{bmatrix}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Olhando de perto o ponto $t = 0$, observamos que:

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x(0^+) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Note que a condição inicial pode ser dita consistente, pois $x(0^-) \in \mathcal{Z}^*$. A definição rigorosa, entretanto, se limita aos sistemas descritores homogêneos. Quando se aplica uma entrada $u(t)$, a continuidade da função $x(t)$ depende não só de $x(0^-)$ pertencer a \mathcal{Z}^* mas também da própria entrada $u(t)$.

Finalmente, para verificarmos a validade da solução, comparamos em uma tabela alguns pontos de $T\dot{x}(t)$ com os equivalentes $Ax(t) + Bu(t)$.

t	$T\dot{x}(t)$	$Ax(t) + Bu(t)$
-1	$\begin{pmatrix} 36,3 \\ -34,3 \\ -217,9 \\ 0 \\ -76,38 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 36,3 \\ -34,3 \\ -217,9 \\ 0 \\ -76,38 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -0,431 \\ -72,1 \\ -3,4 \\ 0 \\ 8,32 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,431 \\ -72,1 \\ -3,4 \\ 0 \\ 8,32 \end{pmatrix}$

A perfeita equivalência se deve ao fato da solução ter sido encontrada simbolicamente com auxílio do software *Mathematica*[®].

3.4 Solução Não-Impulsiva

Quando tratamos de um sistema descritor devemos ser bastante cautelosos na especificação do instante onde impomos a condição inicial e do intervalo de tempo no qual nos interessa obter a solução. Em outras palavras, é importante definir se a condição inicial será $x_0 = x(0^-)$ ou $x_0 = x(0^+)$, e se nos basta a solução para $t > 0$ ou se desejamos obtê-la para $t > 0^-$. A razão desta sutileza jaz nos impulsos intrínsecos à solução do problema. Uma vista cautelosa na solução completa exposta na (3.6) revela a origem destes impulsos. Como ilustração, considere uma entrada genérica, na forma:

$$u(t) = \tilde{u}(t) \xi(t),$$

onde, como antes, $\xi(t)$ representa a função degrau. Como $\dot{\xi}(t) = \delta(t)$, as derivadas de $u(t)$ irão conter invariavelmente termos em $\delta(t)$, $\dot{\delta}(t)$, $\ddot{\delta}(t)$, etc.; conseqüentemente $x(t)$ irá contê-los também.

Quando aparecem impulsos na solução, convém escrevê-la como:

$$\begin{cases} x(t) = x_{(0^-, 0^+)}(t) + x_{(0, \infty)}(t), & t > 0^-; \\ x_0 = x(0^-). \end{cases} \quad (3.12)$$

Tal solução é dita **solução impulsiva**, e é a mais geral de todas. Entretanto, para muitos casos (como para o projeto de estimadores de estados) é suficiente encontrar a solução dita **solução não-impulsiva**, escrita como:

$$\begin{cases} x(t) = x_{(0, \infty)}(t), & t > 0; \\ x_0 = x(0^+). \end{cases} \quad (3.13)$$

Nestes casos não nos interessa como o sistema evolui no intervalo $(0^-, 0^+)$, ou qual o valor de $x(0^-)$.

O conjunto das soluções não-impulsivas pode ser subdividido em dois outros: conjunto das soluções contínuas e conjunto das soluções contínuas por partes. Este último representa o caso de maior interesse, pois não iremos exigir a continuidade da solução. O conjunto de soluções contínuas é muito restrito, e as condições iniciais não são livres: dependem da

entrada aplicada. Mas uma condição inicial não deve depender de $u(t)$! Isto restringe este conjunto a exemplos patológicos e de cunho majoritariamente didático.

A solução do exemplo 3.1 encaixa-se no conjunto das contínuas por partes, pois $x(t)$ apresenta uma descontinuidade finita em $t = 0$. Note, entretanto, que isto só ocorre devido a uma peculiaridade do próprio exemplo. A entrada utilizada foi a rampa ($u(t) = t\xi(t)$), cujas derivadas são:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \xi(t) + t\delta(t); \\ \ddot{u}(t) = 2\delta(t) + t\dot{\delta}(t); \\ \dddot{u}(t) = 3\dot{\delta}(t) + t\ddot{\delta}(t); \\ \vdots \end{cases}.$$

Mas no exemplo, T_h é nilpotente de ordem 2 e portanto na solução $x(t)$ só aparecem termos até $\dot{u}(t)$, e como $t\delta(t) = 0$, não aparecem impulsos. Em contrapartida, se tivéssemos utilizado outra entrada ($u(t) = \xi(t)$, por exemplo), ou se o par (T, A) fornecesse T_h nilpotente de ordem superior a 2, apareceriam impulsos em $x(t)$.

Finalmente, note que pela definição 3.1 temos:

$$\text{Consistência} \begin{matrix} \implies \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \text{Solução não-impulsiva.}$$

Exemplo 3.2

Seja o sistema abaixo, que modela a dinâmica do circuito da figura 3.1.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} C_1 & k_1 C_2 \\ k_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I(t); \\ x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t; \\ I(t) = \cos(t) \xi(t), \end{cases}$$

Este circuito possui dois nós e duas fontes de corrente controladas por corrente. Para $k_1 = k_2$ e $C_1 = C_2$, por exemplo, o sistema assume naturalmente a forma descritora. Façamos pois $k_1 = k_2 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $R_1 = 1$ e $R_2 = \frac{1}{3}$. Vamos então obter a solução completa deste sistema de 2 estados.

O sistema é regular, pois: $\det(sT - A) = -5s + 3$. A parte estritamente própria de sua matriz de transferência é dada por:

$$G_{ep}(s) = (sT - A)^{-1}T \Big|_{\text{parte e.p.}} = \frac{1}{5s - 3} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

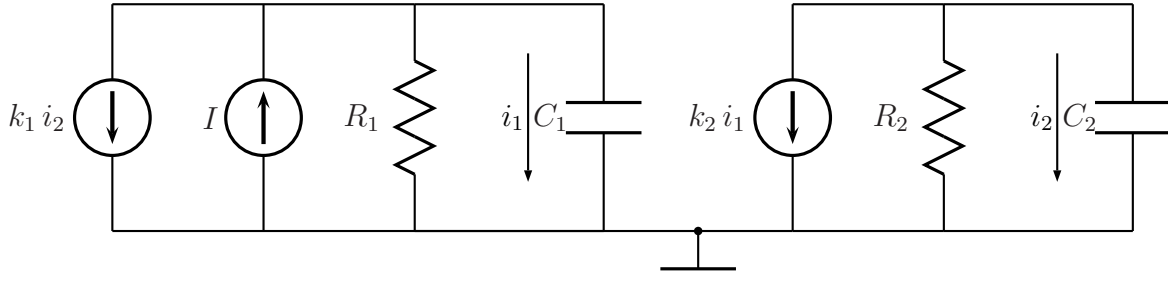


Figura 3.1: Circuito Modelado por Sistema Descritor.

Obtém-se então o operador $g_{ep}(0)$:

$$g_{ep}(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s G_{ep}(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Os subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* são:

$$\mathcal{Z}^* = \text{nul}(I - g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_* = \text{nul}(g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo o sistema na forma canônica (lembrando que $P = [V \mid H]$ e $Q = [TV \mid AH]$), obtemos:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

As novas matrizes, $\bar{T} = Q^{-1}TP$ e $\bar{A} = Q^{-1}TP$, são:

$$\bar{T} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{5} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right],$$

de onde concluímos que $A_z = \frac{3}{5}$ e $T_h = 0$. Já para as submatrizes B_z e B_h , fazemos:

$$\begin{bmatrix} B_z \\ B_h \end{bmatrix} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

T_h é nilpotente de ordem 1 e, portanto, só há necessidade de uma matriz-coeficiente.

$$J_0 = -HB_h = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Calculando-se $f(t)$ de maneira análoga ao exemplo 3.1, obtemos $x(t)$:

$$x(t) = Vf(t) + J_0 u(t) \\ \cong \begin{bmatrix} 1,359 e^{0,6t} - 0,159\cos(t) + 0,265\sen(t) - 0,4\cos(t)\xi(t) \\ 0,453 e^{0,6t} - 0,053\cos(t) + 0,088\sen(t) + 0,2\cos(t)\xi(t) \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Observando a região $t = 0$ vemos que:

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x(0^+) = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

O que aconteceu? Nem $x(0^-)$ nem $x(0^+)$ satisfazem a condição inicial! Algo está errado! A resposta está na própria condição inicial, que não é consistente. Isto é, $x(0^-) \notin \mathcal{Z}^*$, como pode ser facilmente visto. Corrigindo esta falha, adotaremos a nova condição inicial

$$x_0 = x(0^-) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{Z}^*,$$

e chegamos a seguinte solução:

$$x(t) \cong \begin{bmatrix} 3,159 e^{0,6t} - 0,159\cos(t) + 0,265\sen(t) - 0,4\cos(t)\xi(t) \\ 1,053 e^{0,6t} - 0,053\cos(t) + 0,088\sen(t) + 0,2\cos(t)\xi(t) \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Analisando o ponto $t = 0$ obtemos:

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x(0^+) = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 1,2 \end{bmatrix}.$$

Para nosso alívio, a condição inicial confere. Note que este sistema possui solução não-impulsiva para qualquer entrada $u(t)$ não-impulsiva. De fato, para entradas tais que $u(0) = 0$ (como $u(t) = \sen(t)$), a solução é contínua, qualquer que seja a condição inicial. Se a mesma não for consistente, porém, a solução (contínua) não passará por ela.

Capítulo 4

Observador para o Sistema Descritor

4.1 O Observador de Luenberger

Quando se estuda realimentação de estados, normalmente se assume que todas variáveis de estado estão disponíveis como saídas do sistema. Entretanto, na prática, em diversos casos isto não é verdade, seja porque tais variáveis não estão diretamente acessíveis (variáveis internas), seja porque não se dispõe de sensores adequados, ou ainda porque tais sensores apresentam custo proibitivo. Assim sendo, para aplicarmos uma realimentação de estados (para estabilizar, otimizar ou mesmo desacoplar sistemas), o vetor de estados deve ser gerado ou estimado a partir da informação disponível. Um dispositivo que fornece uma aproximação do vetor de estados é chamado **estimador de estados**, ou **observador de estados**.

Estudaremos aqui dois tipos de observador: de ordem completa e de ordem mínima. Em ambos casos, utilizaremos o método de LUENBERGER [11], originalmente proposto por ele em 1971. Para uma visão mais abrangente, remetemos o leitor ao excelente livro de CHEN [12]. É neste capítulo, portanto, que encontra-se a maior contribuição deste trabalho.

Utilizaremos aqui a notação \hat{x} para uma estimação de x .

4.1.1 Observador de Ordem Completa

Considere o sistema não-descritor:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu; \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

No método de Luenberger, uma estimação da saída $\hat{y} \triangleq C\hat{x}$ é comparada a saída do sistema e a diferença usada como correção para o estimador. Assim, a diferença $y - C\hat{x}$ é multiplicada

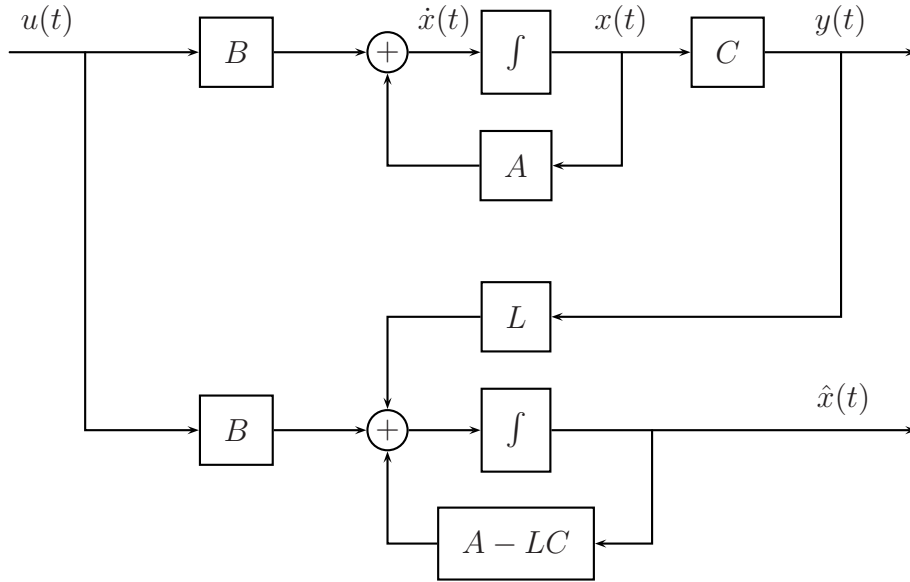


Figura 4.1: Observador de Estados de Ordem Completa.

por uma matriz L e somada à entrada do estimador (Bu), conforme a figura 4.1.

Assim, a equação dinâmica deste observador de estados é:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

$$\therefore \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly. \quad (4.2)$$

O erro entre o estado estimado e o verdadeiro é então:

$$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x}.$$

Subtraindo a (4.1) da (4.2), obtemos:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}. \quad (4.3)$$

Se pudermos escolher os autovalores de $(A - LC)$, basta colocá-los com parte real menor que $-\sigma$ para que o erro \tilde{x} tenda a zero mais rapidamente que $e^{-\sigma t}$. Ou seja, mesmo que as condições iniciais dos dois sistemas sejam bem distintas, o vetor \hat{x} tenderá rapidamente a x . A vantagem deste procedimento a um observador em malha aberta são duas: (i) não é preciso calcular as condições iniciais a cada estimação; (ii) funciona mesmo quando A tem autovalores no semi-plano lateral direito.

Teorema 4.1 *Se o sistema (4.1) é observável, então os autovalores de $(A - LC)$ podem ser escolhidos arbitrariamente (desde que complexos conjugados apareçam aos pares) e, conseqüentemente, seu vetor de estados pode ser estimado através do observador dado por:*

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly.$$

Prova Vide CHEN [12].

Temos portanto as condições necessárias à construção de um observador de estados para o sistema (4.1). Tal observador é dito **assintótico de ordem completa**.

4.1.2 Observador de Ordem Mínima

Considere o sistema (4.1), e assuma que $C_{r \times n}$ tenha posto completo. Defina então

$$P \triangleq \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde R é uma matriz $(n - r) \times n$ real e constante, arbitrária desde que P seja não-singular. A inversa de P é dada por:

$$Q \triangleq P^{-1} \triangleq [Q_1 \mid Q_2], \quad (4.5)$$

onde Q_1 e Q_2 são respectivamente matrizes $n \times r$ e $n \times (n - r)$. Imediatamente temos que:

$$I_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} [Q_1 \mid Q_2] = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Agora aplicamos uma transformação de equivalência $\bar{x} \triangleq Px$ ao sistema (4.1), que assume a forma:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= PAP^{-1}\bar{x} + PBu \\ y &= CP^{-1}\bar{x} = CQ\bar{x} = [I_r \mid 0]\bar{x} \end{aligned}$$

que pode ser decomposta como:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u; \\ y = [I_r \mid 0]\bar{x} = \bar{x}_1, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde \bar{x}_1 são os primeiros r elementos de \bar{x} e \bar{x}_2 os restantes $(n - r)$ elementos. Note que $y = \bar{x}_1$ implica em apenas os últimos $(n - r)$ estados precisarem ser estimados. Desta forma, precisamos apenas de um observador de ordem $(n - r)$, o qual recebe o título de **observador de ordem mínima** (ou de ordem reduzida).

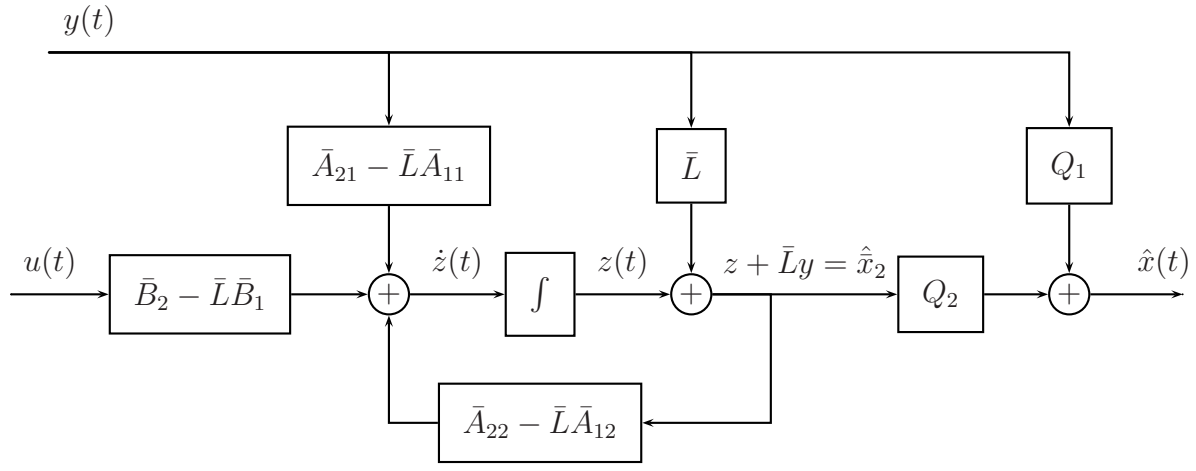


Figura 4.2: Observador de Estados de Ordem Mínima.

Teorema 4.2 *O par $\{A, C\}$ no sistema (4.1), ou equivalentemente o par $\{\bar{A}, \bar{C}\}$ no sistema (4.7) é observável se, e somente se, o par $\{\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12}\}$ na (4.7) for observável.*

Prova Vide CHEN [12].

CHEN [12] mostra também que uma estimação \hat{x} de x é então obtida por:

$$\hat{x} = Q \hat{x} = [Q_1 \mid Q_2] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \bar{L} & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

onde z é obtido resolvendo-se (vide figura 4.2)

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})]y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u.$$

De fato, definindo o erro de estimação como:

$$e(t) \triangleq \bar{x}_2(t) - (z(t) + \bar{L}y(t)), \quad (4.9)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\bar{x}}_2 - (\dot{z} + \bar{L}\dot{\bar{x}}_1) = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2u - (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}\bar{x}_1) - \\ &\quad - (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})\bar{x}_1 - (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u - \bar{L}\bar{A}_{11}\bar{x}_1 - \bar{L}\bar{A}_{12}\bar{x}_2 - \bar{L}\bar{B}_1u \\ &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(\bar{x}_2 - z - \bar{L}\bar{x}_1) \\ \therefore \dot{e}(t) &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})e(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os teoremas 4.1 e 4.2 afirmam que os autovalores de $(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})$ podem ser arbitrariamente determinados. Assim, a taxa com que $e(t)$ tende a zero pode ser escolhida maior que a taxa com que $x(t)$ varia e, portanto, $z + \bar{L}y$ fornece uma estimativa para $\bar{x}_2(t)$.

Observadores de ordem mínima apresentam grande vantagem computacional sobre os de ordem completa. A sua implementação é também mais simples, permitindo um projeto mais enxuto (menos integradores) e econômico. Mas eles possuem também uma desvantagem: uma parte da saída é alimentada diretamente ao estado estimado. Assim, se a saída contiver ruídos, estes aparecerão no estado estimado. Já no caso do estimador de ordem completa, a saída é filtrada (integrada), e quaisquer ruídos em alta frequência, suprimidos.

4.2 Observabilidade do Sistema Descritor

No que diz respeito à reconstrução de estados, toda a informação está contida na parte independente de $u(t)$. Em estudos de observabilidade podemos então, sem perda de generalidade, fazer $u(t) \equiv 0$. Conseqüentemente, a distinção entre $x(0^-)$ e $x(0^+)$ só será necessária quando a primeira não for uma condição inicial consistente.

Durante toda esta seção e no restante do capítulo, iremos supor $\text{posto}(C) = r$, ou seja, que a matriz C tenha posto completo. Esta limitação não é severa, pois na prática isto é geralmente verdade.

Para determinarmos se há ou não observabilidade completa em um dado sistema descritor, é suficiente encontrar o Subespaço de Estados Inobserváveis de Dinâmica Finita, a ser denotado por:

$$W_f = \{x(0) \in \mathcal{Z}^* \mid u(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0, \forall t \geq 0\},$$

onde, por construção, haverá observabilidade completa dos estados de dinâmica finita quando $W_f = \{0\}$.

Teorema 4.3 *O subespaço W_f dos estados inobserváveis de dinâmica finita do sistema (1.1) é dado por:*

$$W_f = V \text{ nul} \begin{bmatrix} CV \\ CVA_z \\ \vdots \\ CV(A_z)^{l-1} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

onde V é o mapa de inserção de \mathcal{Z}^* em \mathcal{X} e $l = \dim(\mathcal{Z}^*)$.

Prova Demonstraremos o teorema mostrando que um conjunto está contido no outro.

Assim, seja $x(0) \in W_f$. Então $y(t) \stackrel{\text{eq. (3.2)}}{=} V e^{A_z t} V^g x(0) = 0$, $t \geq 0$. Conseqüentemente

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{[l-1]}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CVV^g x(0) \\ CV A_z V^g x(0) \\ \vdots \\ CV(A_z)^{l-1} V^g x(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} CV \\ CV A_z \\ \vdots \\ CV(A_z)^{l-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq M} V^g x(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$\therefore V^g x(0) \in \text{nul}(M) \Leftrightarrow x(0) \in V \text{nul}(M).$$

Como $x(0)$ é arbitrário, concluímos que $W_f \subset V \text{nul}(M)$.

Por outro lado, seja $x(0)$ é uma condição inicial consistente tal que $x(0) \in V \text{nul}(M)$.

Uma vez que $x(0) \in \mathcal{Z}^*$, então $x(0) \stackrel{\text{eq. (3.2)}}{=} VV^g x(0)$ e portanto:

$$VV^g x(0) \in V \text{nul}(M) \Rightarrow V^g x(0) \in \text{nul}(M) \Rightarrow M V^g x(0) = 0 (*).$$

Lembrando que $e^{A_z t}$ é definida a partir de sua expansão em Série de Taylor, temos:

$$Cx(t) = CV \left[I + A_z t + \frac{1}{2!} (A_z)^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} (A_z)^n t^n + \dots \right] V^g x(0), \quad t \geq 0.$$

Como A_z é uma matriz $l \times l$, suas potências de ordem $\geq l$ podem ser escritas como combinações lineares de $A_z, (A_z)^2, \dots, (A_z)^{l-1}$. Isto, junto com (*), implica em $Cx(t) = 0$, $t \geq 0$.

Logo, $x(0)$ é inobservável e, portanto, $V \text{nul}(M) \subset W_f$.

c.q.d.

Uma importante conseqüência do teorema acima é dada no

Corolário 4.1 *Se $\text{nul}(T) \cap \mathcal{Z}^* = \{0\}$, então o sistema (1.1) tem os pólos finitos observáveis se, e somente se:*

$$\text{nul} \begin{bmatrix} CV \\ CV A_z \\ \vdots \\ CV(A_z)^{l-1} \end{bmatrix} = \{0\}.$$

onde V é o mapa de inserção de \mathcal{Z}^* em \mathcal{X} e $l = \dim(\mathcal{Z}^*)$.

Prova Seja o sistema (1.1) observável para $t \geq 0$. Temos então $W_f = \{0\}$. Como $\text{nul}(V) = \{0\}$ decorre naturalmente que $\text{nul}(M) = \{0\}$, onde M foi definido na (4.12). Seja agora $\text{nul}(M) = \{0\}$. Obviamente $W_f = V \text{nul}(M) = \{0\}$.

c.q.d.

Note que M é uma matriz $rl \times l$, pois C é uma matriz $r \times n$ e V uma matriz $n \times l$. Logo, $\text{nul}(M) = \{0\} \Leftrightarrow \text{posto}(M) = l$.

4.3 Observador para o Sistema Descritor

Iremos agora estender a metodologia de Luenberger para a construção de observadores aos sistemas parcialmente dinâmicos. Propomos não apenas um estimador de ordem completa mas também um de ordem mínima, que carrega as mesmas vantagens do seu análogo não-descritor.

4.3.1 Observador de Ordem Completa

Seja $x(t)$ a solução do sistema descritor obtida em (3.6), com $f(t)$ satisfazendo à (3.7) e as matrizes-coeficientes J_i ($i = 0, 1, \dots, k-1$) dadas pela (3.8). Se $h(t)$ é uma estimativa para $f(t)$, então um observador para $x(t)$ é:

$$z(t) \triangleq \Omega \hat{x} = \Omega \left[Vh(t) + \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \right], \quad (4.13)$$

onde Ω é a **matriz de observação** ($\Omega = I_n \Leftrightarrow z(t) = \text{Observador Identidade}$), por hipótese sempre inversível.

Definindo as funções de erro:

$$\begin{cases} e(t) = h(t) - f(t) \\ E(t) = z(t) - \Omega x(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

e usando a (4.13) para $z(t)$ e a (3.6) para $x(t)$, podemos escrever:

$$E(t) = \Omega Vh(t) - \Omega V f(t) = \Omega V e(t). \quad (4.15)$$

Lema 4.1 *O observador $z(t)$ alcança os estados $\Omega x(t)$ sempre que $h(t)$ alcança $f(t)$.*

Prova É consequência imediata das (4.14) que

$$h(t) \rightarrow f(t) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \Leftrightarrow z(t) \rightarrow \Omega x(t),$$

com a implicação (\Rightarrow) se tornando implicação recíproca (\Leftrightarrow) quando $\text{nul}(\Omega V) = \{0\}$. Por ser $\text{nul}(V) = \{0\}$, isto ocorre quando $\text{posto}(\Omega) = n$, por exemplo quando $\Omega = I_n$.

c.q.d.

Seguindo os passos de Luenberger, definimos uma equação diferencial para $h(t)$:

$$\dot{h}(t) = (A_z - LCV)h(t) + Ly(t) + B_z u(t) - LC \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t). \quad (4.16)$$

Somos imediatamente levados a escrever a equação do erro $e(t)$, reunindo esta última à primeira das (4.14). Por ser $\dot{f}(t) = A_z f(t) + B_z u(t)$ (vide (3.7)), com $y(t) = Cx(t)$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{h}(t) - \dot{f}(t) = \\ &= A_z e(t) - LCV h(t) + LC \left(V f(t) + \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \right) - LC \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{e}(t) = (A_z - LCV) e(t). \quad (4.17)$$

Lema 4.2 *Se os autovalores de $(A_z - LCV)$ pertencerem a \mathbb{C}^- e se o espectro de $(A_z - LCV)$ (denotado por $\sigma(A_z - LCV)$) estiver contido em \mathbb{C}^- , então a estimativa $h(t)$ tenderá à $f(t)$ assintoticamente.*

Prova Comparando a (3.7) e a (4.17), vê-se que se $\sigma(A_z - LCV) \subset \mathbb{C}^-$, então $e(t)$ tende a zero, de modo que $h(t) \rightarrow f(t)$ assintoticamente. Mas como os autovalores de $(A_z - LCV)$ não podem coincidir com os de A_z é comum colocar os primeiros à esquerda destes últimos.

c.q.d.

Do teorema 4.1 segue o seguinte corolário:

Corolário 4.2 *Os autovalores de $(A_z - LCV)$ podem ser escolhidos arbitrariamente (desde que complexos conjugados apareçam aos pares) por uma escolha adequada da matriz real L se, e somente se, o sistema descrito pelo par (CV, A_z) for completamente observável.*

Prova Basta fazer a mudança de variáveis $C \rightarrow CV$ e $A \rightarrow A_z$ no teorema 4.1.

c.q.d.

4.3.2 Observador de Ordem Mínima

Reescrevamos o mapa de inserção V como

$$V = [V_1 \mid V_2], \quad (4.18)$$

com V_1 e V_2 tais que:

$$\begin{cases} \text{im}(V_1) \triangleq \mathcal{V}_1; \\ \text{im}(V_2) \triangleq \mathcal{V}_2 = \mathcal{Z}^* \cap \text{nul}(C); \end{cases} \quad \begin{cases} \dim(V_1) \triangleq s; \\ \dim(V_2) = l - s. \end{cases} \quad (4.19)$$

Resulta então da (4.19) que $\text{im}(V_2) \subset \text{nul}(C)$, de modo que:

$$CVf(t) = [CV_1 \mid 0] \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

onde CV_1 é uma matriz $r \times s$. No que segue, iremos supor CV sendo posto completo. Como ambas C e V já o são, e como ambas matrizes são independentes (V só depende de A e T) é bastante razoável esperar que o seu produto o seja. Ainda assim, as raras exceções podem ser resolvidas com uma pequena alteração no método exposto abaixo.

Temos que $\dim(\text{nul}(C)) = n - \dim(\text{im}(C)) = n - r$, e que $\dim(\mathcal{Z}^*) = l$. Sabemos também que para dois subespaços quaisquer N_1 e N_2 , vale

$$\dim(N_1 + N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

$$\therefore \dim(\mathcal{Z}^* \cap \text{nul}(C)) = \dim(\mathcal{Z}^*) + \dim(\text{nul}(C)) - \underbrace{\dim(\mathcal{Z}^* + \text{nul}(C))}_{\leq n}$$

$$\therefore \dim(\mathcal{Z}^* \cap \text{nul}(C)) \geq \dim(\mathcal{Z}^*) + \dim(\text{nul}(C)) - n = l - r.$$

Comparando com a (4.19), vemos que $(l - s) \geq (l - r)$ e, portanto, $s \leq r$. Assim, CV_1 terá sempre no mínimo tantas linhas quanto colunas, isto é,

$$\text{nul}(CV_1) = \{0\}. \quad (4.21)$$

Definimos então uma matriz $\Gamma_{l \times r}$ tal que:

$$\bar{y}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \Gamma y(t) \triangleq \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_1(t) \\ \bar{C}_2(t) \end{bmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t). \quad (4.22)$$

Mas

$$\Gamma y(t) = \Gamma \left[CVf(t) + C \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \right] =$$

$$\text{eq. (4.20)} \quad \Gamma[CV_1 | 0] \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \Gamma C \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t).$$

Ou seja, $\Gamma[CV_1 | 0] = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$. Podemos assim escrever:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (CV_1)^g \\ (CV_1)^\perp \end{bmatrix} \begin{matrix} \} s \times r \\ \} (l-s) \times r \end{matrix}, \quad (4.23)$$

onde usamos $(\star)^\perp$ para denominar a matriz ortogonal à (\star) . Resulta também desta última e da (4.22) que:

$$\begin{cases} \bar{y}_1(t) = (CV_1)^g y(t); \\ \bar{C}_1 = (CV_1)^g C. \end{cases} \quad (4.24)$$

Segue ainda da (4.22) que:

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) - \bar{C}_1 \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} s \times r \\ \} (l-s) \times r \end{matrix}. \quad (4.25)$$

Ou seja, apenas os $(l-s)$ últimos termos de $f(t)$ precisam ser estimados; os s primeiros são obtidos diretamente de $y(t)$ e $u(t)$. Isto é inteiramente análogo à discussão subsequente à (4.7). Estendendo a analogia, podemos decompor as matrizes A_z e B_z da seguinte forma:

$$A_z = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]; \quad B_z = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde A_{11} é uma matriz $s \times s$, A_{12} é $s \times (l-s)$, A_{21} é $(l-s) \times s$ e A_{22} é $(l-s) \times (l-s)$. Vejamos então como fica a (3.7), a equação diferencial de $f(t)$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) - \bar{C}_1 \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) - \bar{C}_1 \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t).$$

Explicitando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}_1(t) - \bar{C}_1 \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i+1]}(t) &= A_{11} \left[\bar{y}_1(t) - \bar{C}_1 \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \right] + A_{12} f_2(t) + B_1 u(t); \\ \dot{f}_2(t) &= A_{21} \left[\bar{y}_1(t) - \bar{C}_1 \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \right] + A_{22} f_2(t) + B_2 u(t). \end{cases} \quad (4.27)$$

A primeira destas pode ser expandida como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}_1(t) = & A_{11} \bar{y}_1(t) + A_{12} f_2(t) + (B_1 - A_{11} \bar{C}_1 J_0)u(t) + (\bar{C}_1 J_0 - A_{11} \bar{C}_1 J_1)\dot{u}(t) + \\ & + (\bar{C}_1 J_1 - A_{11} \bar{C}_1 J_2)\ddot{u}(t) + \dots + (\bar{C}_1 J_{k-2} - A_{11} \bar{C}_1 J_{k-1})u^{[k-1]}(t) + \\ & + \bar{C}_1 J_{k-1} u^{[k]}(t),\end{aligned}$$

ou, de maneira mais simples,

$$\dot{\bar{y}}_1(t) = A_{11} \bar{y}_1(t) + A_{12} f_2(t) + N_1 v(t), \quad (4.28)$$

onde

$$N_1 = [B_1 - A_{11} \bar{C}_1 J_0 \mid \bar{C}_1 J_0 - A_{11} \bar{C}_1 J_1 \mid \dots \mid \bar{C}_1 J_{k-1}] \quad (4.29)$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{[k]}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Calculando a segunda das (4.27) analogamente, chegamos a:

$$\dot{\bar{y}}_2(t) = A_{21} \bar{y}_1(t) + A_{22} f_2(t) + N_2 v(t), \quad (4.31)$$

onde

$$N_2 = [B_2 - A_{21} \bar{C}_1 J_0 \mid -A_{21} \bar{C}_1 J_1 \mid -A_{21} \bar{C}_1 J_2 \mid \dots \mid -A_{21} \bar{C}_1 J_{k-1} \mid 0]. \quad (4.32)$$

Lema 4.3 *O sistema descrito por A_z é observável se, e somente se, o par (A_{12}, A_{22}) for também observável. Em outras palavras:*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} CV \\ CVA_z \\ \vdots \\ CV(A_z)^{l-1} \end{bmatrix} = l \Leftrightarrow \text{posto} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12} A_{22} \\ \vdots \\ A_{12} (A_{22})^{l-s-1} \end{bmatrix} = l - s.$$

Prova Lembrando que $CV = [CV_1 \mid 0]$, temos:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} CV \\ CVA_z \\ \vdots \\ CV(A_z)^{l-1} \end{bmatrix} = \text{posto} \left\{ CV_1 \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ A_{11} & A_{12} \\ A_{11}^2 + A_{12} A_{21} & A_{11} A_{12} + A_{12} A_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\text{eq. (4.21)} \quad \underline{\underline{\text{posto}}} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ A_{11} & A_{12} \\ A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & A_{12} \\ 0 & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

A matriz I_s garante o posto das s primeiras colunas, nos permitindo zerar o resto destas colunas na última passagem sem alterar o posto da matriz. Finalmente, concluímos que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & A_{12} \\ 0 & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{11}(A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22}) + A_{12}(A_{21}A_{12} + (A_{22})^2) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \stackrel{(\star)}{\underline{\underline{=}}} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & A_{12} \\ 0 & A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{12}(A_{22})^2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = s + \text{posto} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \\ \vdots \\ A_{12}(A_{22})^{l-s-1} \end{bmatrix}.$$

(\star) \longrightarrow Para que um novo grupo de r linhas aumente o posto da matriz é necessário que pelo menos uma delas seja linearmente independente de todas as outras acima. Isto só ocorrerá se nessas r linhas exista pelo menos uma transformação (matriz) que tenha em sua imagem elementos que são levados em zero pelas demais linhas. E uma vez que $\text{nul}(A_{12}) \subset \text{nul}(A_{11}A_{12})$, a parcela $A_{11}A_{12}$ na 3ª linha não contribui para aumentar o posto da matriz. Na 4ª linha, a 1ª parcela não contribui pelo mesmo motivo, e como $\text{nul}(A_{12}) \subset \text{nul}(A_{12}A_{21}A_{12})$, o termo $A_{12}A_{21}A_{12}$ da 2ª parcela também não (e assim por diante para as demais linhas).

c.q.d.

Rearrumando os termos em (4.28) e (4.31), e introduzindo a matriz de realimentação $L_{(l-s) \times s}$, chegamos à:

$$\dot{f}_2(t) - L\dot{\bar{y}}_1(t) = (A_{22} - LA_{12})f_2(t) + (A_{21} - LA_{11})\bar{y}_1(t) + (N_2 - LN_1)v(t).$$

O leitor pode considerar como uma estimativa de $f_2(t)$

$$\dot{h}(t) = L\dot{\bar{y}}_1(t) + (A_{22} - LA_{12})h(t) + (A_{21} - LA_{11})\bar{y}_1(t) + (N_2 - LN_1)v(t),$$

mas tal estimativa depende da derivada de $\bar{y}_1(t)$. Desta forma, definimos uma estimativa $\hat{h}(t)$ de $f_2(t) - L\bar{y}_1(t)$ como:

$$\dot{\hat{h}}(t) = (A_{22} - LA_{12})\hat{h}(t) + [(A_{22} - LA_{12})L + A_{21} - LA_{11}]\bar{y}_1(t) + (N_2 - LN_1)v(t), \quad (4.33)$$

que em forma matricial é escrito como:

$$\dot{\hat{h}}(t) = [-L \mid I_{l-s}] \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & N_1 \\ \hline A_{21} & A_{22} & N_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} I_s & 0 & 0 \\ \hline L & I_{l-s} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{k+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{y}_1(t) \\ \hat{h}(t) \\ v(t) \end{array} \right].$$

Nosso observador de estados será então dado por

$$z(t) = \Omega \hat{x}(t) = \Omega [V_1 \mid V_2] \left[\begin{array}{c} f_1(t) \\ \hat{h}(t) + L\bar{y}_1(t) \end{array} \right] + \Omega \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t). \quad (4.34)$$

Usando-se a (4.25), esta equação pode ser expandida como

$$z(t) = \Omega(V_1 + V_2L) \bar{y}_1(t) + \Omega V_2 \hat{h}(t) + \Omega(I_n - V_1\bar{C}_1) \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t)$$

e reescrita em forma matricial:

$$z(t) = \Omega [V_1 \mid V_2 \mid I_n] \left[\begin{array}{c|c|c} I_s & 0 & -\bar{C}_1 \\ \hline L & I_{l-s} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{y}_1(t) \\ \hat{h}(t) \\ \sum_{i=0}^{k-1} J_i u^{[i]}(t) \end{array} \right]. \quad (4.35)$$

Analogamente ao caso de ordem completa, as funções-vetores de erro $e(t)$ e $E(t)$ são definidas como:

$$\begin{cases} e(t) \triangleq \hat{h}(t) + Ly_1(t) - f_2(t); \\ E(t) \triangleq z(t) - \Omega x(t) \stackrel{eq.(4.34)}{=} \Omega V_2 (\hat{h}(t) + L\bar{y}_1(t) - f_2(t)) = \Omega V_2 e(t). \end{cases} \quad (4.36)$$

E, assim como na (4.10), temos:

$$\dot{e}(t) = (A_{22} - LA_{12}) e(t). \quad (4.37)$$

Os lemas 4.1 e 4.2 continuam válidos para os observadores de ordem mínima, assim como o corolário 4.2. Desta forma, se os estados de dinâmica finita do sistema descritor forem observáveis, então pode-se encontrar L tal que os pólos de $(A_{22} - LA_{12})$ sejam alocados à esquerda dos de A_{22} , fazendo com que $\hat{h}(t)$ alcance $f_2(t) - L\bar{y}_1(t)$ (e, conseqüentemente, que $z(t)$ alcance $\Omega x(t)$) assintoticamente.

O caso onde o posto de CV não for completo, pode ser resolvido com uma metodologia inteiramente análoga a anterior, modificando-se a (4.20):

$$CVf(t) = [CV_1 \mid \widetilde{CV}_1 \mid 0] \begin{bmatrix} \frac{f_1(t)}{\widetilde{f}_1(t)} \\ \frac{f_2(t)}{\widetilde{f}_2(t)} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

onde as colunas de \widetilde{CV}_1 são combinações lineares das de CV_1 . Tal modificação é necessária para que CV_1 volte a possuir espaço nulo igual a $\{0\}$ e, conseqüentemente, para que $(CV_1)^g$ e Γ existam. O resto do procedimento é alterado analogamente, e o observador pode ser construído também para estes casos.

Exemplo 4.1

Vamos encontrar um observador identidade com o mínimo de informação do sistema descritor não-homogêneo abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t); \\ x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t; \\ u(t) = e^t \xi(t). \end{array} \right.$$

Seguindo o mesmo procedimento dos exemplos anteriores, obtemos:

$$\mathcal{Z}^* = \text{nul}(I - g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_* = \text{nul}(g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A regularidade do sistema pode ser conferida através do lema 2.3:

$$\text{nul}(T) \cap \mathcal{Z}^* = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \{0\}.$$

Pela (4.19), temos

$$\mathcal{Z}^* \cap \text{nul}(C) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{im}(V_2).$$

E como $\text{im}[V_1 | V_2] = \mathcal{Z}^*$, temos

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore s = \dim(V_1) = 2.$$

As matrizes A_z e T_h são dadas por

$$A_z = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right]; \quad T_h = [0].$$

O sistema é observável, como mostra a equação abaixo:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12} A_{22} \\ \vdots \\ A_{12} (A_{22})^{l-s-1} \end{bmatrix} = \text{posto}[A_{12}] = 1 = l - s.$$

Calculando as submatrizes B_z e B_h , chegamos a

$$\begin{bmatrix} B_z \\ B_h \end{bmatrix} = Q^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Mas B_z deve ela própria ser subdividida, de acordo com a (4.26):

$$B_z = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Determinando \bar{C}_1 pela (4.24), temos

$$\bar{C}_1 = (CV_1)^g C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^g C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ser de ordem 1 a nilpotência de T_h , só precisamos de uma matriz-coeficiente:

$$J_0 = -HB_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pela (4.30), obtemos $v(t) = [u(t) \quad \dot{u}(t)]^t$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} N_1 &= [B_1 - A_{11}\bar{C}_1J_0 \mid \bar{C}_1J_0] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ N_2 &= [B_2 - A_{21}\bar{C}_1J_0 \mid 0] = [-1 \quad 0] \end{aligned}$$

Pelo lema 4.2, o sistema $(A_{22} - LA_{12})$ deve ser mais rápido que A_{22} . Ou seja, basta escolher seu pólo à esquerda de -1. Fixando-o em -2, obtemos:

$$A_{22} - LA_{12} = 1 - L \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 \quad \therefore \quad L = [0 \quad -3].$$

O projeto do observador é dado pela (4.35):

$$\begin{aligned} z(t) &= (V_1 + V_2L) \bar{y}_1(t) + V_2 \hat{h}(t) + (I_n - V_1\bar{C}_1)J_0 u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{y}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{h}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \end{aligned}$$

A função vetor $\hat{h}(t)$ é dada pela (4.33):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}}(t) &= -2\hat{h}(t) + [-2[0 \quad -3] - [0 \quad -3]]\bar{y}_1(t) + ([-1 \quad 0] - [0 \quad -3])v(t) \\ &= -2\hat{h}(t) + [0 \quad 9]\bar{y}_1(t) + [-1 \quad 3] \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para prosseguirmos, é necessário obter $\bar{y}_1(t) = (CV_1)^q y(t)$. A saída, por sua vez, é obtida resolvendo se o sistema como nos exemplos anteriores. Obtemos então:

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ (t + 0, 5t^2 + 1)e^t \xi(t) \\ (t + 0, 5t^2)e^t \xi(t) \\ -t e^t \xi(t) \end{bmatrix};$$

$$\bar{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t + 0, 5t^2) e^t \xi(t) + e^t \\ (t + 0, 5t^2 + 1) e^t \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - e^t \xi(t) \\ (t + 0, 5t^2 + 1) e^t \xi(t) \end{bmatrix}.$$

Como estamos interessados na região $t > 0$, ignoraremos o degrau $\xi(t)$. Logo,

$$\dot{\hat{h}}(t) = -2\hat{h}(t) + (11 + 9t + 4, 5t^2) e^t.$$

Resolvendo-se esta equação diferencial, obtemos

$$\hat{h}(t) = (-3 + \hat{h}(0) + (3 + 2t + 1, 5t^2) e^{3t}) e^{-2t}.$$

Como a convergência é garantida para qualquer $\hat{h}(0)$, podemos arbitrar $\hat{h}(0) = 0$, o que nos leva a $\hat{h}(t) = (3 + 2t + 1, 5t^2) e^t - 3 e^{-2t}$ e, conseqüentemente, a

$$z(t) = \begin{bmatrix} e^t - e^t + e^t \\ (t + 0, 5t^2 + 1)e^t \\ (t + 0, 5t^2 + 1)e^t - e^t \\ -3(t + 0, 5t^2 + 1)e^t + (3 + 2t + 1, 5t^2)e^t - 3e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ (t + 0, 5t^2 + 1)e^t \\ (t + 0, 5t^2)e^t \\ -t e^t - 3 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o erro de estimação é dado por:

$$E(t) \triangleq z(t) - x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 e^{-2t} \end{bmatrix},$$

que se aproxima de zero rapidamente. Note ainda que o erro é identicamente nulo para 3 dos 4 estados. Dois destes estados podem ser estimados diretamente através da saída, exatamente a razão que nos motivou a formular o observador de ordem mínima. Mas por quê temos um 3º estado perfeitamente estimado? A razão está na dinâmica do sistema. Ela está contida em \mathcal{Z}^* , que tem dimensão 3. Ou seja, o sistema possui apenas 3 graus de liberdade. O 4º grau foi eliminado ao escolhermos uma condição inicial consistente.

Exemplo 4.2

Vejamos agora a construção de um observador de ordem completa para o circuito da figura 3.1, cuja solução foi dada no exemplo 4.2. Reescreveremos por conveniência o sistema descritor deste circuito (já substituídos os valores $k_1 = k_2 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $R_1 = 1$ e $R_2 = \frac{1}{3}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I(t); \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t); \\ x(0^-) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^t; \\ I(t) = \cos(t) e^{-t} \xi(t), \end{array} \right.$$

Note que, comparando com o exemplo 4.2, adicionamos uma matriz C e modificamos a forma entrada. A condição inicial também foi ajustada para se tornar consistente, como já havia sido feito ao final do dito exemplo.

Os subespaços \mathcal{Z}^* e \mathcal{H}_* são:

$$\mathcal{Z}^* = \text{nul}(I - g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_* = \text{nul}(g_{ep}(0)) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o corolário 4.1 o sistema é observável, pois

$$\text{nul}(CV) = \text{nul} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \{0\}.$$

Temos que $A_z = \left[\frac{3}{5}\right]$ e $T_h = [0]$. Subdividindo a matriz B , obtemos $B_z = \left[\frac{3}{25}\right]$ e $B_h = \left[-\frac{1}{5}\right]$. T_h é nilpotente de ordem 1 e só precisamos de uma matriz-coeficiente:

$$J_0 = -HB_h = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Solucionando o sistema, encontramos:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{445} (1407 e^{1,6t} - 72 \cos(t) + 45 \text{sen}(t) - 178 \cos(t) \xi(t)) e^{-t} \\ \frac{1}{445} (469 e^{1,6t} - 24 \cos(t) + 15 \text{sen}(t) + 89 \cos(t) \xi(t)) e^{-t} \end{bmatrix}; \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{445} (1876 e^{1,6t} - 96 \cos(t) + 60 \text{sen}(t) - 89 \cos(t) \xi(t)) e^{-t} \\ \frac{1}{445} (469 e^{1,6t} - 24 \cos(t) + 15 \text{sen}(t) + 89 \cos(t) \xi(t)) e^{-t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde, como sempre, estamos interessados na região $t > 0$, e ignoraremos o degrau $\xi(t)$.

O autovalor de $(A_z - LCV)$ deve estar a esquerda de -1 para que o observador seja mais rápido que a atenuação da entrada. Escolhendo a matriz L de modo a colocá-lo em $-3,4$ (vai arredondar algumas contas), obtemos:

$$\frac{3}{5} - L \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = -3,4 \quad \therefore \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela (4.16), temos então:

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= -3,4 h(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \left(\frac{3}{25} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right) I(t) \\ &= -3,4 h(t) + \left[\frac{1}{445} (1876 e^{1,6t} - 185 \cos(t) + 60 \operatorname{sen}(t)) e^{-t} \right] + \frac{8}{25} \cos(t) e^{-t}. \end{aligned}$$

Resolvendo-se esta equação diferencial, obtemos

$$h(t) = (h(0) e^{-2,4t} - e^{-2,4t} + 1,0539 e^{1,6t} - 0,0539 \cos(t) + 0,0337 \operatorname{sen}(t)) e^{-t}.$$

Como a convergência é garantida para qualquer $h(0)$, podemos arbitrar $h(0) = 0$.

Temos então, para $z(t)$:

$$\begin{aligned} z(t) &\triangleq Vh(t) + J_0 I(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} h(t) + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cos(t) e^{-t} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 e^{-3,4t} + (3,162 e^{1,6t} - 0,562 \cos(t) + 0,101 \operatorname{sen}(t)) e^{-t} \\ -e^{-3,4t} + (1,054 e^{1,6t} + 0,146 \cos(t) + 0,034 \operatorname{sen}(t)) e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, o erro de estimação é dado por:

$$E(t) \triangleq z(t) - x(t) = \begin{bmatrix} -3 e^{-3,4t} \\ -e^{-3,4t} \end{bmatrix},$$

que tende a zero na taxa que determinamos ao escolher o pólo de $(A_z - LCV)$.

Capítulo 5

Conclusões

Esperamos ter sucedido na tarefa de apresentar de forma didática e clara diversas características dos sistemas descritores regulares, assim como as dos observadores de estado convencionais.

O método proposto para construção de observadores de estados de ordem completa e mínima para sistemas descritores regulares é inédito e de grande importância, pois permite a realimentação dos estados não diretamente acessíveis. Realimentação de estados, por sua vez, é uma das mais poderosas ferramentas na síntese de sistemas lineares. Os parâmetros necessários à construção de ambos tipos de observador podem ser facilmente obtidos por um algoritmo muito adequado à computação simbólica. Como o projeto baseia-se na solução completa dos sistemas descritores, é relevante o fato de termos encontrado uma forma fechada e de simples demonstração desta solução. Tal forma é também inédita e representa outra contribuição deste trabalho.

Embora tenhamos nos restringido ao caso CV posto completo, esta condição é naturalmente satisfeita na maioria dos casos. O projeto pode, no entanto, ser ajustado sem grandes dificuldades para englobar também as exceções. Deixamos em aberto, porém, um estudo mais detalhado destes casos.

Entre as utilidades não exploradas do observador de estados está possibilidade do seu uso na alocação de autovalores. Ao contrário do que ocorre em sistemas não-descritores, em alguns casos é possível trazer pólos do infinito e alocá-los na região finita.

Neste texto tampouco abordamos o problema da robustez dos observadores de estados, sempre importante na implementação prática dos mesmos. Tal análise fica em aberto, e espera-se que este trabalho sirva de base para futuras elaborações.

Referências Bibliográficas

- [1] DIAS, R. J., MESQUITA, F., “A Closed Form Solution for Regular Descriptor Systems Using the *Moore - Penrose* Generalized Inverse”, *Automatica*, v. 36, n. 2, pp. 417–420, 1990.
- [2] AZEVEDO Jr., G. M., *Sistemas Descritores Lineares: Subespaços Invariantes Generalizados e Observabilidade, Aspectos Estruturais da Dinâmica Impulsiva e Invariância Paramétrica*. Tese Ph.D., COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, agosto 2002.
- [3] YIP, E. L., SINCOVEC, R. F., “Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. AC26, n. 3, pp. 702–707, 1981.
- [4] COBB, D., “Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems”, *International Journal of Control*, v. 33, pp. 1135–1146, 1981.
- [5] HOU, M., MÜLLER, P. C., “Causal Observability of Descriptor Systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 44, n. 1, pp. 158–163, 1999.
- [6] WONHAM, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. 2^a Edição. Nova Iorque, EUA, Springer Verlag, 1979.
- [7] COUGO-PINTO, M. V., BESSA, A., *Álgebra Linear para Estudantes de Física*. UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, notas de aula, 2003.
- [8] SILVA, V. S., *Decomposição Estrutural de Sistemas Lineares Multivariáveis Parcialmente Dinâmicos*. Tese de M.Sc., COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1986.
- [9] ARMENTANO, V. A., “The Pencil $(sE - A)$ and Controllability for Generalized Linear Systems”, *SIAM J. Control Opt.*, v. 24, pp. 616–638, 1986.

- [10] DIAS, R. J., *Observers for Regular Descriptor Systems*. UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, não publicado, 2002.
- [11] LUENBERGER, D. G., “An Introduction to Observers”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. AC16, pp. 596–601, 1971.
- [12] CHEN, C.-T., *Linear System Theory and Design*. 2^a Edição. Nova Iorque, EUA, Oxford University Press, 1984.
- [13] BERNAHRD, P., “On Singular Implicit in Dynamical Systems”, *SIAM J. Control Opt.*, v. 20, pp. 612–633, 1982.
- [14] WONG, K. T., “The Eigenvalue Problem $\lambda Tx + Sx$ ”, *Journal of Diff. Eqs.*, v. 16, n. 2, pp. 270–280, 1974.