



Gabarito elaborado pela equipe do projeto de extensão *Elaboração de Material de Preparação para a Olimpíada Brasileira de Física (OBF)*, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IF-UFRJ).

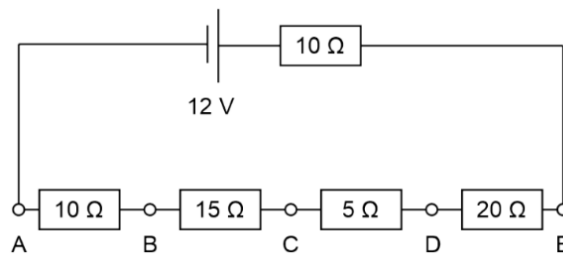
### Equipe

João Octavio Oliveira Cony    Lucas Bianchi Marcianesi    Maria Clara Vicente Coelho  
Sidney Natzuka Junior    Georgeana Arruda Limeira    Nathan Machado Vasconcelos

### Revisão

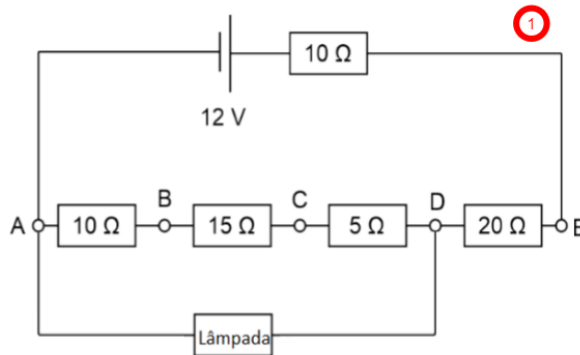
Prof. Marcos G. Menezes    Prof. Rodrigo B. Capaz

1. Em sua bancada de laboratório, uma estudante investiga a potência dissipada por vários dispositivos conectando-os ao circuito abaixo. Em dado momento, ela conecta, entre os pontos A e D, uma lâmpada incandescente cujas especificações são dadas pelo fabricante através da etiqueta (6V ; 0,6W) . Qual é o valor da potência efetivamente dissipada pela lâmpada, em W?



### Resolução:

Com a adição da lâmpada o circuito passa a ter a seguinte configuração:

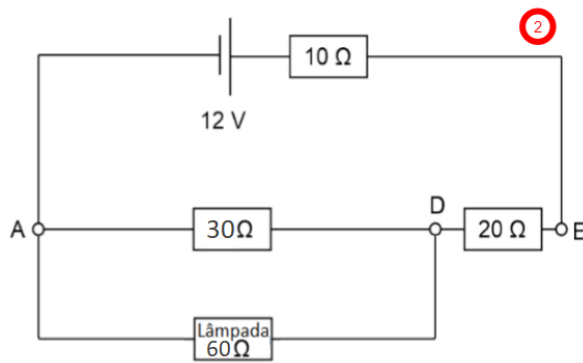


Como precisaremos simplificar o circuito, cada configuração equivalente terá um número associado, que pode ser visto no indicador em vermelho.

Primeiramente, precisamos calcular a resistência elétrica  $R_L$  da lâmpada. Podemos calculá-la usando a equação  $R_L = \frac{U_L^2}{P_L}$  onde  $U_L$  é a diferença de potencial aplicada à lâmpada e  $P_L$  sua potência. Utilizando os valores dados pelas especificações do fabricante, encontramos:

$$R_L = \frac{U_L^2}{P_L} = \frac{(6 \text{ V})^2}{0,6 \text{ W}} = 60 \Omega \quad (1)$$

Agora que sabemos a resistência da lâmpada, podemos calcular a resistência equivalente do circuito e descobrir a corrente fornecida pela fonte. Olhando para a configuração 1, vemos que os três resistores no ramo superior da ligação entre A e D estão ligados em série. Portanto, a resistência equivalente desse ramo é igual à soma das resistências:  $R = 10 \Omega + 15 \Omega + 5 \Omega = 30 \Omega$ . Com isso, o circuito pode ser simplificado de acordo com a figura acima (configuração 2).



Agora, as resistências de 30 e 60  $\Omega$  entre A e D estão em paralelo. A resistência equivalente delas pode ser calculada via:

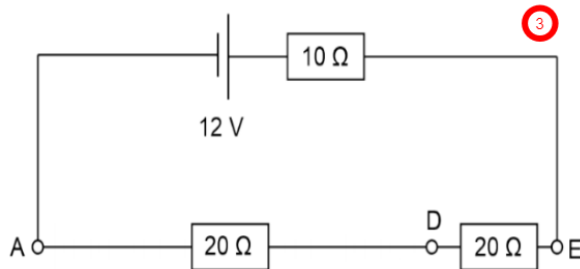
$$\frac{1}{R_{eq}^{AD}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_L} \quad (2)$$

Então:

$$\frac{1}{R_{eq}^{AD}} = \frac{1}{30 \Omega} + \frac{1}{60 \Omega} = \frac{1}{20 \Omega}$$

$$R_{eq}^{AD} = 20 \Omega \quad (3)$$

Com isso, simplificamos mais uma vez o circuito para a figura abaixo (configuração 3):



Ficamos com três resistores em série, cuja resistência equivalente é  $R_{eq} = 10 \Omega + 20 \Omega + 20 \Omega = 50 \Omega$ . Finalmente, utilizando a lei de Ohm para essa resistência, podemos calcular a corrente fornecida pela fonte:

$$i = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{12 \text{ V}}{50 \Omega} = 0,24 \text{ A} \quad (4)$$

Podemos agora calcular a potência  $P_{diss}$  dissipada pela lâmpada utilizando a equação:

$$P_{diss} = R_L (i_L)^2 \quad (5)$$

onde  $i_L$  é a corrente que passa pela lâmpada. Note que, por termos uma ligação em paralelo no circuito original,  $i \neq i_L$ .

Para achar  $i_L$ , voltemos para a configuração 2 e façamos uma análise da associação em paralelo. Note que o resistor  $R = 30 \Omega$  do ramo superior e a lâmpada estão submetidos a uma mesma diferença de potencial. Utilizando essa informação e a lei de Ohm para cada resistor, temos:

$$U_R = U_L$$

$$R i_R = R_L i_L \quad (6)$$

onde  $i_R$  é a corrente que passa por  $R$

Além disso, pelo princípio da conservação de carga elétrica, a soma das correntes nos dois ramos tem que ser igual à corrente total  $i = 0,24 \text{ A}$ , ou seja:

$$i_R + i_L = 0,24 \text{ A} \quad (7)$$

Da equação (7) temos  $i_R = 0,24 - i_L$ . Substituindo essa relação em (6), obtemos:

$$R(0,24 - i_L) = R_L i_L$$

Conhecemos  $R$  e  $R_L$ , logo, podemos substituir seus valores na equação acima e obter  $i_L$ . Fazendo isso achamos:

$$i_L = \frac{R}{R + R_L} \times 0,24 \text{ A} = 0,08 \text{ A} \quad (8)$$

Agora basta usarmos a equação (5) para chegar à potência dissipada pela lâmpada:

$$P_{diss} = 60 \Omega \times (0,08 \text{ A})^2 \approx 0,38 \text{ W} \quad (9)$$

**Resposta: A potência efetivamente dissipada pela lâmpada é de aproximadamente 0,38 W.**

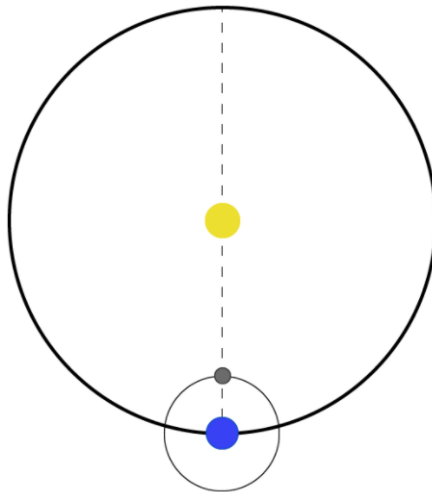
■

2. Considere um sistema planetário hipotético formado por uma única estrela em torno da qual orbita um planeta que possui uma única lua (satélite natural). Neste sistema, as órbitas do planeta em torno da estrela e da lua em torno do planeta são circulares e coplanares e o período de translação do planeta em torno da estrela é de  $T_p = 360$  dias. Sabendo que, após um eclipse solar, o próximo eclipse lunar ocorre 30 dias depois, determine o período orbital da lua em torno do planeta, em dias, nos seguintes casos.

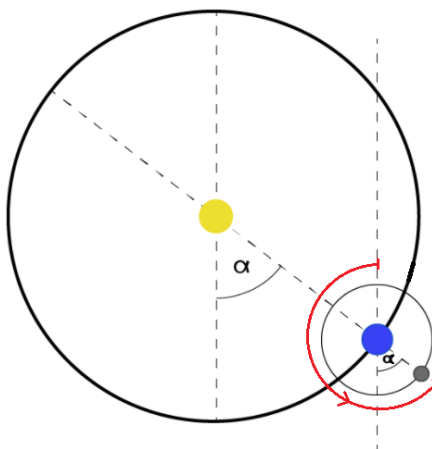
- (a) O planeta e a sua lua percorrem suas órbitas no mesmo sentido, por exemplo, ambas no sentido anti-horário.  
 (b) O planeta e a sua lua percorrem suas órbitas em sentidos opostos.

**Resolução:**

A figura abaixo mostra a configuração inicial do sistema para os dois casos (eclipse solar). A estrela é representada pelo disco amarelo, o planeta pelo disco azul e a lua pelo disco cinza. As órbitas do planeta e da lua (sem especificação do sentido) são representadas pelos círculos preto e cinza, respectivamente.



- (a) Considerando as duas órbitas no sentido anti-horário, passamos para a configuração de eclipse lunar mostrada na figura abaixo.



Se em 360 dias o planeta dá uma volta completa em torno da estrela e, portanto, descreve um ângulo de  $2\pi$  rad, em 30 dias, que é o tempo gasto para chegarmos nessa nova configuração, ele descreverá um ângulo:

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{30}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad (10)$$

Neste caso em que as duas órbitas são no sentido anti-horário o deslocamento angular da lua, indicado pelo pelo arco em vermelho na imagem acima é:

$$\Delta\theta = \pi + \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ rad} \quad (11)$$

Com isso podemos calcular a velocidade angular da lua:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{7\pi}{6}}{30 \text{ dias}} = \frac{7\pi}{180} \frac{1}{\text{dias}} \quad (12)$$

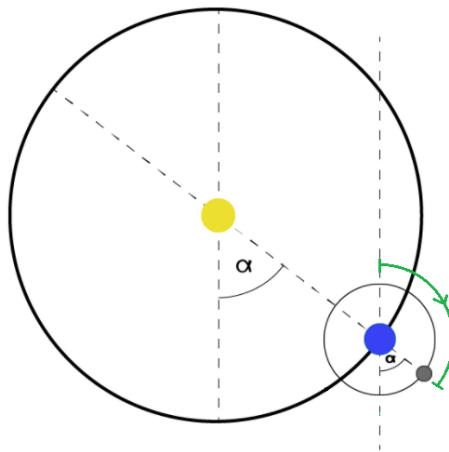
E agora calculando o período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \times 180}{7\pi} \text{ dias} \approx 51 \text{ dias} \quad (13)$$

**Resposta: Considerando as duas órbitas em sentidos opostos, vemos que o período orbital da lua em torno do planeta é de aproximadamente 51 dias.**

■

(b) Considerando a órbita do planeta no sentido anti-horário e a de sua lua no sentido horário, passamos para a seguinte configuração (eclipse lunar):



Assim como no caso do item anterior, a passagem do estado inicial de eclipse solar para o estado de eclipse lunar ocorre em 30 dias, então temos novamente:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad (14)$$

No entanto, neste caso em que as duas órbitas ocorrem em sentidos contrários, o deslocamento angular da lua, indicado pelo pelo arco em verde na imagem acima é:

$$\Delta\theta = \pi - \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \quad (15)$$

Com isso, calculamos novamente a velocidade angular da lua:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{30 \text{ dias}} = \frac{5\pi}{180} \frac{1}{\text{dias}} \quad (16)$$

E agora calculando o período:

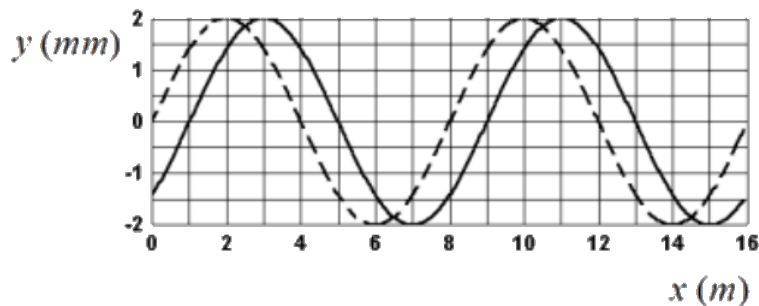
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \times 180}{5\pi} \text{ dias} = 72 \text{ dias} \quad (17)$$

**Resposta: Considerando as duas órbitas em sentidos opostos, vemos que o período orbital da lua em torno do planeta é de 72 dias.**

■

3. A figura abaixo representa dois instantâneos de uma mesma onda mecânica transversal senoidal que se propaga para a direita em uma corda esticada. Sabendo que o intervalo de tempo que separa os dois instantâneos é de 0,05 s, determine a velocidade transversal máxima da onda, em m/s.

**Resolução**



Seja  $y(x, t)$  o perfil da onda. Como a onda se move para a direita, podemos tomar como  $t = 0$  o instante quando o perfil é representado pela linha tracejada e  $t = 0.05$  o instante quando ele é representado pela linha contínua. Da figura, podemos ver que  $y(0, 0) = 0$ , de forma que podemos representar a onda por uma função senoide sem fase inicial, ou seja:

$$y(x, t) = A \text{ sen}(kx - \omega t) \quad (18)$$

onde  $A$  é a amplitude da onda,  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda e  $\omega$  é a frequência angular.  $\lambda$  é o comprimento de onda.

A velocidade transversal  $v_t$  da onda é a velocidade de um dado ponto da corda ao longo da direção  $Y$  em uma dada posição do eixo  $X$  e instante  $t$ . Para calcular seu valor máximo, podemos tomar um ponto genérico da corda, por exemplo  $x = 0$ . Neste caso, a equação acima se reduz a um movimento harmônico simples em uma dimensão:

$$y(0, t) = A \text{ sen}(-\omega t) = -A \text{ sen}(\omega t) \quad (19)$$

Considere agora um intervalo de tempo  $\Delta t$  consideravelmente pequeno ( $\omega \Delta t \ll 1$ ). Vamos calcular a velocidade média transversal entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  como uma aproximação para o valor instantâneo. Assim:

$$v_y(0, t) \approx \frac{y(0, t + \Delta t) - y(0, t)}{\Delta t} = \frac{-A \text{ sen}(\omega t + \omega \Delta t) - (-A \text{ sen}(\omega t))}{\Delta t} \quad (20)$$

Utilizando a fórmula do seno da soma ( $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$ ), obtemos:

$$v_y(0, t) \approx \frac{-A (\text{sen}(\omega t)\cos(\omega \Delta t) + \text{sen}(\omega \Delta t)\cos(\omega t)) + A \text{ sen}(\omega t)}{\Delta t} \quad (21)$$

Lembrando que  $\Delta t$  é pequeno, podemos utilizar as aproximações  $\text{sen}(\omega \Delta t) \approx \omega \Delta t$  e  $\cos(\omega \Delta t) \approx 1$ . Com isso:

$$v_y(0, t) \approx \frac{-A (\text{sen}(\omega t) + (\omega \Delta t)\cos(\omega t)) + A \text{ sen}(\omega t)}{\Delta t} = -\omega A \cos(\omega t) \quad (22)$$

Note que  $\Delta t$  é cancelado na passagem para a última igualdade, de forma que a expressão acima dá o valor exato da velocidade instantânea em  $x = 0$  no limite em que  $\Delta t$  vai a zero. Finalmente, como o cosseno é limitado entre -1 e 1, concluímos que o valor máximo da velocidade transversal é  $v_t^{max} = \omega A$ . Resta então determinar  $\omega$  e  $A$ .

A amplitude é definida como metade da distância vertical entre um pico e um vale. Como os picos estão em  $y = 2$  mm e os vales em  $y = -2$  mm, concluímos que a amplitude da onda vale  $A = 2$  mm.

A velocidade angular pode ser obtida por meio das relações:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} \quad (23)$$

onde  $f$  é a frequência da onda e  $v = \lambda f$  é a velocidade de propagação. Do gráfico, podemos ver que a distância entre dois picos sucessivos é de 8 m, portanto o comprimento de onda é  $\lambda = 8$  m. Para determinar a velocidade de propagação, perceba que a onda se move  $\Delta x = 1$  m para a direita entre os dois instantes representados. Assim:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1 \text{ m}}{0,05 \text{ s}} = 20 \text{ m/s} \quad (24)$$

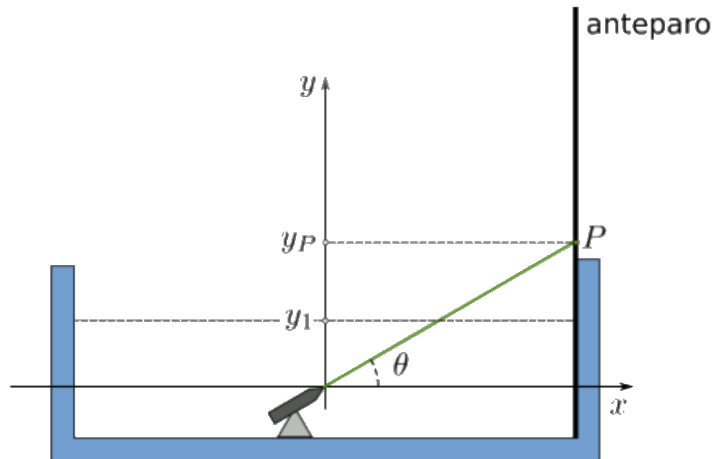
Substituindo esses valores na expressão da velocidade transversal máxima e fazendo as conversões de unidades apropriadas, encontramos:

$$v_t^{max} = \omega A = \frac{2\pi v A}{\lambda} = \frac{2 \times 3 \times 20 \text{ m/s} \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}}{8 \text{ m}} = 3,0 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad (25)$$

**RESPOSTA: A velocidade transversal máxima da onda é  $3,0 \times 10^{-2} \text{ m/s} = 30 \text{ mm/s}$ .**

■

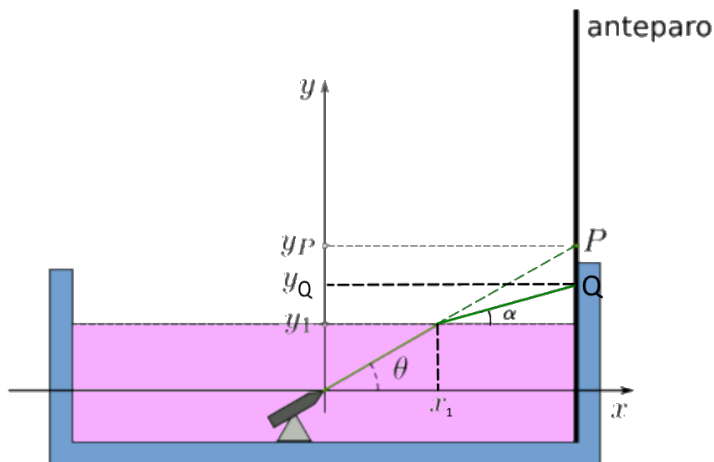
4. Uma fonte de radiação laser que pode ser submergida é fixada no fundo de uma cuba inicialmente vazia. A fonte é orientada na direção de um anteparo vertical de modo que o feixe laser emitido faz um ângulo  $\theta = 60^\circ$  com a horizontal. Adotando o sistema de referências da figura, observa-se que, quando a fonte é ligada, o feixe atinge o anteparo no ponto  $P$  de coordenada  $y_P = 50$  cm. Depois, quando a cuba é preenchida com um líquido de índice de refração  $n = \sqrt{2}$  até um nível  $y_1 = 10$  cm, verifica-se que o feixe atinge o anteparo em um ponto  $Q$  (não representado na figura).



- (a) Qual a coordenada  $y_Q$  do ponto  $Q$ , em cm?  
 (b) O arranjo experimental permite deslocar o aparelho laser ao longo do eixo  $x$ . Mantendo-se a orientação do feixe, para que coordenada  $x$ , em cm, deve ser movido o ponto de origem do feixe de modo que o mesmo atinja o ponto  $P$  com a cuba preenchida com o líquido?

### Resolução

- (a) Após a cuba ser preenchida pelo líquido, a luz emitida pela fonte será refratada ao atravessar a interface entre o líquido e o ar. Esta nova situação é mostrada na figura abaixo.



Antes de analisarmos a refração, vamos descobrir a coordenada  $x_1$  do ponto onde a luz encontra a interface. Observando a figura, como conhecemos o ângulo  $\theta$  e a coordenada  $y_1$ , podemos escrever:

$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{\tan 60^\circ} = \frac{10 \text{ cm}}{\sqrt{3}} \approx 5,9 \text{ cm} \quad (26)$$

Vamos determinar ainda a coordenada  $x_P = x_Q$  comum dos pontos  $P$  e  $Q$  que estão sobre o anteparo. Como conhecemos  $y_P$ , podemos empregar o mesmo raciocínio para obter:

$$\tan \theta = \frac{y_P}{x_P} \Rightarrow x_P = \frac{y_P}{\tan 60^\circ} = \frac{50 \text{ cm}}{\sqrt{3}} \approx 29,4 \text{ cm} \quad (27)$$

Finalmente, vamos analisar a refração através da interface. Devemos tomar cuidado com os ângulos a serem inseridos na lei de Snell, já que os ângulos  $\theta$  e  $\alpha$  mostrados na figura são medidos com relação à horizontal e na lei de Snell os ângulos são medidos com relação à normal da interface, que nesse caso é a vertical. Assim, considerando que o índice de refração do ar vale 1, podemos escrever:

$$n \sin(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \alpha) \quad (28)$$

Lembrando que, para qualquer ângulo  $\theta$ , vale a relação  $\sin(90 - \theta) = \cos(\theta)$  e substituindo  $n = \sqrt{2}$ , obtemos:

$$\sqrt{2} \cos \theta = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (29)$$

de onde concluímos que  $\alpha = 45^\circ$ .

Com essa informação, podemos determinar a coordenada  $y_Q$  empregando um raciocínio análogo ao utilizado anteriormente. Observando o triângulo retângulo associado ao ângulo  $\alpha$ , podemos escrever:

$$\tan \alpha = \frac{y_Q - y_1}{x_Q - x_1} \quad (30)$$

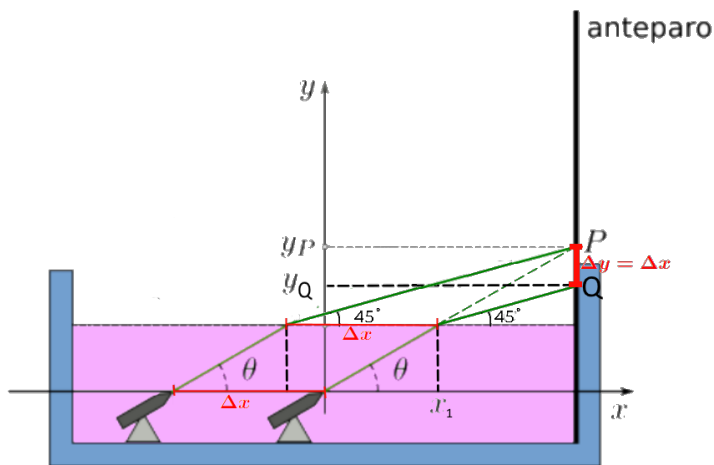
Por outro lado, sabemos também que  $\tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$ . Assim:

$$\begin{aligned} y_Q - y_1 &= x_Q - x_1 \\ y_Q &= x_Q - x_1 + y_1 \\ y_Q &\approx (29,4 - 5,9 + 10,0) \text{ cm} = 33,5 \text{ cm} \end{aligned} \quad (31)$$

**RESPOSTA: A coordenada  $y_Q$  do ponto  $Q$  vale 33,5 cm.**

■

(b) Da nossa análise anterior, é evidente que devemos deslocar a fonte para a esquerda para que o feixe volte a alcançar o ponto  $P$  sobre o anteparo. As situações antes e depois do deslocamento são mostradas na figura abaixo.



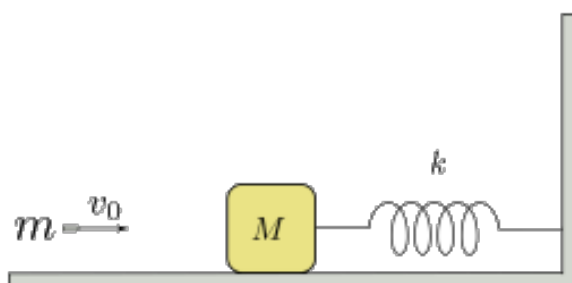
Como o ângulo  $\theta$  do feixe com relação à horizontal é fixado, a configuração da refração na interface não é alterada e  $\alpha$  permanecerá o mesmo. Assim, como  $\tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$ , o deslocamento vertical adicional da luz no ar, dado por  $\Delta y = y_P - y_Q$ , deve ser igual ao deslocamento horizontal adicional  $\Delta x$ . Portanto, obtemos  $\Delta x = y_P - y_Q \approx 16,5 \text{ cm}$ .

Finalmente, note que  $\Delta x$  também deve corresponder, em módulo, ao deslocamento da fonte para esquerda. Portanto, o aparato deve ser deslocado para a coordenada  $x_F = -\Delta x = -16,5 \text{ cm}$

**RESPOSTA: O aparato deve ser deslocado para a coordenada horizontal  $x_F = -16,5 \text{ cm}$ .**

■

5. Em um laboratório de Física, é usado um sistema massa-mola para determinar a velocidade com que um projétil é disparado. O sistema é constituído por um bloco de massa  $M = 5,00 \text{ kg}$  que está apoiado em uma superfície horizontal de atrito desprezível e está preso a uma parede rígida vertical através de uma mola de constante elástica  $k = 4500 \text{ N/m}$ . Para fazer a medida da velocidade  $v_0$  de um projétil de massa  $m = 10,0 \text{ g}$ , o mesmo é disparado contra o bloco, que está inicialmente em repouso, nas condições mostradas na figura. A parte do bloco que recebe o impacto é feita de um material deformável que aloja o projétil em seu interior. Considere que a mola se deforma apenas depois do projétil se alojar completamente no bloco (colisão projétil-bloco instantânea). Determine a velocidade  $v_0$  do projétil, em m/s, no caso em que a medida da amplitude de oscilação do bloco após o impacto é de 2,50 cm.



## Resolução

Vamos considerar o sistema formado pelo projétil e o bloco. Como o enunciado nos informa que a colisão é instantânea, podemos assumir que a mola não exerce força sobre o sistema durante a colisão. Com isso, não há força externa resultante sobre o sistema e o momento linear total  $\vec{P}$  (quantidade de movimento total) deve ser conservado.

Utilizando esta lei de conservação e adotando um sistema de coordenadas com eixo horizontal apontando para a direita, podemos determinar a velocidade escalar  $v$  do sistema após a colisão:

$$\begin{aligned} P_{antes} &= P_{depois} \\ mv_0 &= (m + M)v \\ v &= \frac{m}{m + M} v_0 \end{aligned} \quad (32)$$

onde exploramos o fato que, após a colisão, a bala se aloja no bloco e podemos tratar os dois corpos como um só de massa  $m + M$  e velocidade escalar  $v$ .

Após a colisão, o sistema passa a sofrer a ação da força elástica exercida pela mola. Como esta força é de origem conservativa, a energia mecânica  $E$  do sistema deve se conservar durante a deformação da mola. Imediatamente após a colisão, a mola ainda se encontra na sua posição relaxada, logo a energia mecânica nesse momento é puramente cinética:

$$E = \frac{(m + M)v^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + M)} \quad (33)$$

onde utilizamos a Eq. 32 para substituir o valor de  $v$ .

Por outro lado, quando o sistema produz a deformação máxima na mola, sua velocidade é nula e a energia é puramente potencial:

$$E = \frac{kA^2}{2} \quad (34)$$

onde  $A$  é a amplitude informada no enunciado.

Aplicando a lei de conservação de energia, obtemos:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + M)} \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{(m + M)kA}}{m} \quad (35)$$

Substituindo os valores informados no enunciado e convertendo  $A$  para metros e  $m$  para quilos, encontramos:

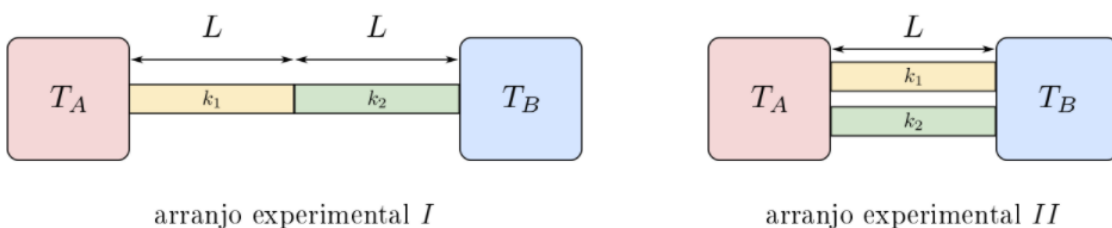
$$v_0 = \frac{\sqrt{(5,00 + 0,0100) \text{ kg} \times 4500 \text{ N/m} \times 0,0250 \text{ m}}}{0,0100 \text{ kg}} = 375 \text{ m/s} \quad (36)$$

**RESPOSTA: A velocidade inicial do projeto vale  $v_0 = 375 \text{ m/s}$ .**

■

6. As figuras abaixo ilustram dois arranjos experimentais usados para investigar a taxa de transferência de calor entre os corpos  $A$  e  $B$ . As temperaturas  $T_A$  e  $T_B$ , com  $T_A > T_B$ , são mantidas constantes por equipamentos não representados na figura. Em ambos os arranjos, são usadas duas barras cilíndricas de dimensões idênticas. A barra 1 tem condutividade térmica  $k_1$  e a barra 2 tem condutividade térmica  $k_2$ . Ambas as barras são isoladas termicamente em suas superfícies laterais de modo que o calor é conduzido de  $A$  a  $B$  sem perdas para a vizinhança. Suponha que, no regime estacionário, a taxa de transferência de calor de  $A$  para  $B$ , nos arranjos I e II sejam, respectivamente  $\phi_I$  e  $\phi_{II}$ . Determine a razão  $\phi_{II}/\phi_I$  nos seguintes casos:

- (a) as barras têm as mesmas condutividades térmicas  $k_1 = k_2$ ;  
 (b) a condutividade térmica de uma barra é o triplo da outra  $k_1 = 3k_2$ .





## Resolução

(a) No regime estacionário, a temperatura em cada ponto das barras não dependerá do tempo. Não há acúmulo de calor e portanto o fluxo de calor através de uma seção transversal qualquer de uma barra deve ser o mesmo.

Relembremos a lei da condutividade térmica de Fourier para uma barra homogênea de condutividade térmica  $k$ , comprimento  $L$  e seção transversal de área  $A$  constante:

$$\phi = \frac{kA\Delta T}{L} \quad (37)$$

Nesta equação,  $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre as extremidades da barra.

Vamos analisar primeiro o arranjo I. Seja  $T$  a temperatura na junção das barras 1 e 2. O fluxo de calor através da barra 1 é dado por:

$$\phi_1 = \frac{k_1 A (T_A - T)}{L} \quad (38)$$

Analogamente, o fluxo através da barra 2 é:

$$\phi_2 = \frac{k_2 A (T - T_B)}{L} \quad (39)$$

Como não há perdas através das superfícies laterais das barras (isoladas termicamente), o calor só pode fluir da barra 1 para a barra 2 neste arranjo, de forma que os dois fluxos devem ser iguais. Igualando as duas equações acima, podemos obter o valor de  $T$ :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ k_1(T_A - T) &= k_2(T - T_B) \\ T &= \frac{k_1 T_A + k_2 T_B}{k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (40)$$

Substituindo este valor na expressão de  $\phi_1$ , encontramos:

$$\phi_I = \phi_1 = \frac{k_1 A}{L} \left( T_A - \frac{k_1 T_A + k_2 T_B}{k_1 + k_2} \right) = \frac{k_1 k_2 A (T_A - T_B)}{(k_1 + k_2) L} \quad (41)$$

Comparando este resultado com a expressão inicial da lei de Fourier, percebemos que as duas barras podem ser substituídas por uma única “barra efetiva”, de seção transversal de área  $A$ , comprimento  $L$  e condutividade  $k_{ef}$ :

$$k_{ef} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (42)$$

Note como o raciocínio é análogo ao da associação de resistores em série, discutido tradicionalmente nos cursos de eletromagnetismo (mas cuidado: a expressão é diferente por estarmos analisando condutividades aqui!).

Analisemos agora o segundo arranjo. Desta vez as barras não estão conectadas, e calor passa pelas duas independentemente. Os fluxos através de cada barra valem:

$$\phi'_1 = \frac{k_1 A (T_A - T_B)}{L}; \quad \phi'_2 = \frac{k_2 A (T_A - T_B)}{L} \quad (43)$$

O fluxo de calor total será dado pela soma desses fluxos:

$$\phi_{II} = \phi'_1 + \phi'_2 = \frac{(k_1 + k_2) A (T_A - T_B)}{L} \quad (44)$$

Comparando mais uma vez este resultado com a expressão inicial da lei de Fourier, percebe-se que as duas barras podem ser substituídas por uma única “barra efetiva” com a mesma geometria das barras originais e condutividade  $k_{ef} = k_1 + k_2$ . Perceba novamente a analogia com associação de resistores, nesse caso a associação em paralelo (e o mesmo cuidado na comparação das expressões).

A partir das Eqs. 41 e 44, determinamos a razão entre  $\phi_{II}$  e  $\phi_I$ :

$$\frac{\phi_{II}}{\phi_I} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2} \quad (45)$$

Para o caso particular  $k_1 = k_2$ , proposto no enunciado, encontramos:

$$\frac{\phi_{II}}{\phi_I} = \frac{(2k_2)^2}{k_2^2} = 4 \quad (46)$$

**RESPOSTA:**  $\phi_{II}/\phi_I = 4$ .

■

(b) Para o caso particular  $k_1 = 3k_2$ , encontramos:

$$\frac{\phi_{II}}{\phi_I} = \frac{(4k_2)^2}{3k_2^2} = \frac{16}{3} \quad (47)$$

**RESPOSTA:**  $\phi_{II}/\phi_I = 16/3$ .

■

7. O prêmio Nobel de Física de 1960 foi atribuído a Donald A. Glaser pela invenção, em 1952, da câmara de bolhas. Apesar de atualmente superada por outros equipamentos, a câmara de bolhas desempenhou papel fundamental no campo de física de partículas. Essencialmente, a câmara de bolhas permite observar a trajetória de partículas carregadas em movimento, pois estas deixam seu rastro em bolhas de, em geral, hidrogênio líquido super aquecido. Suponha que, em uma câmara de bolhas, seja capturado o decaimento de um partícula subatômica que forma um elétron e um pósitron. Suponha que este decaimento é observado em um referencial no qual a partícula subatômica está inicialmente em repouso e há a presença de um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , de módulo  $B = 2,50$  mT e perpendicular ao plano de movimento do elétron e pósitron resultantes. Determine o intervalo de tempo, em s, entre o decaimento e o instante em que o elétron e o pósitron colidem. (Despreze a interação Coulombiana entre o elétron e o pósitron e as perdas de energia da interação das partículas com o hidrogênio líquido da câmara de bolhas).

### Resolução:

No referencial proposto pelo enunciado, a partícula subatômica estava inicialmente em repouso. Assim, o momento linear (quantidade de movimento) total do sistema antes do decaimento vale:

$$\vec{P}_i = \vec{0} \quad (48)$$

Com o decaimento, essa partícula dá origem a um elétron e um pósitron. Assumindo que não há forças externas atuando sobre o sistema durante este processo, o momento linear total deve ser conservado. Assim, após o decaimento, o momento linear total do sistema deve valer:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i = \vec{0} \quad (49)$$

Por outro lado,  $\vec{P}_f$  é composto de duas parcelas: o momento do elétron  $\vec{P}_e$  e o momento do pósitron  $\vec{P}_p$ . Assim:

$$\begin{aligned} \vec{P}_e + \vec{P}_p &= \vec{0} \\ \vec{P}_e &= -\vec{P}_p \\ m_e \vec{V}_e &= -m_p \vec{V}_p \\ \vec{V}_e &= -\vec{V}_p \end{aligned} \quad (50)$$

onde  $m_e$  e  $m_p$  são as massas do elétron e do pósitron, respectivamente, e  $\vec{V}_e$  e  $\vec{V}_p$  são suas velocidades imediatamente após o decaimento. Na última linha acima, exploramos ainda que o pósitron é a anti-partícula do elétron, de forma que  $m_e = m_p = m$  e as partículas terão velocidades de mesmo módulo e sentidos opostos.

Vamos agora discutir o movimento subsequente do elétron e do pósitron na presença do campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . A força magnética sobre uma partícula de carga  $q$  e velocidade  $\vec{V}$  é dada por:

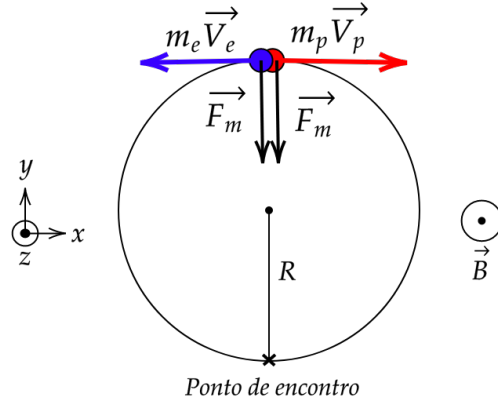
$$\vec{F}_m = q\vec{V} \times \vec{B} \quad (51)$$

O símbolo “ $\times$ ” entre dois vetores indica uma operação que chamamos de produto vetorial. Como podemos ver pela equação (51), o resultado de um produto vetorial é também um vetor. O sentido e direção da operação  $\vec{v} \times \vec{B}$  é dado pela regra da mão direita, porém, é importante perceber que o sinal da carga pode alterar o sentido da força, fazendo com que  $\vec{F}_m$  e  $\vec{v} \times \vec{B}$  fiquem antiparalelos. Assim, nos casos em que temos cargas negativas, fazemos a regra da mão direita e invertemos o sentido do vetor encontrado.

Vamos escolher como eixo  $X$  de um sistema de coordenadas a direção de movimento das duas partículas imediatamente após o decaimento, de forma que  $\vec{V}_e = -v\hat{x}$  e  $\vec{V}_p = +v\hat{x}$ , onde  $v > 0$  é o módulo da velocidade comum às duas partículas. Tomando o eixo  $Z$  no sentido de  $\vec{B}$ , de forma que  $\vec{B} = B\hat{z}$  ( $B > 0$ ), as forças magnéticas sobre as partículas nesse instante são:

$$\begin{aligned}\vec{F}_m^p &= (+e)\vec{V}_p \times \vec{B} = e(v\hat{x}) \times (B\hat{z}) = -evB\hat{y} \\ \vec{F}_m^e &= (-e)\vec{V}_e \times \vec{B} = -e(-v\hat{x}) \times (B\hat{z}) = -evB\hat{y}\end{aligned}\quad (52)$$

onde utilizamos a relação entre os unitários  $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$  e substituímos os valores  $q_p = +e$  e  $q_e = -e$  para as cargas do pósitron e do elétron, respectivamente. Portanto, as forças são idênticas nesse instante e apontam para baixo, como mostra a figura abaixo:



Observe que as forças são perpendiculares aos vetores velocidade e campo magnético e permanecem com essa característica durante todo o movimento em razão da lei de força dada pela Eq. 51. Consequentemente, se desconsideramos a ação de outras forças, tais como a força elétrica entre as partículas e o atrito com o hidrogênio líquido na câmara, as partículas devem apresentar um movimento circular uniforme. Em razão das velocidades iniciais opostas, elas girarão em sentidos opostos com velocidade de módulo constante e igual a  $v$  e com o mesmo raio  $R$ , como mostra a figura. O valor de  $R$  pode ser obtido a partir da segunda lei de Newton, igualando o módulo da força magnética sobre uma das partículas com a resultante centrípeta:

$$F_m^p = |\vec{F}_m^p| = evB = \frac{mv^2}{R} \quad \rightarrow \quad R = \frac{mv}{eB}\quad (53)$$

Com os parâmetros acima, podemos calcular o período de revolução como:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}\quad (54)$$

Finalmente, a figura evidencia que a colisão entre o próton e o elétron deve ocorrer após ambos completarem meia volta cada um. Assim, o intervalo de tempo entre o decaimento e o instante da colisão é dado por:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{eB}\quad (55)$$

Substituindo na equação acima os valores informados no enunciado e no formulário da prova, obtemos:

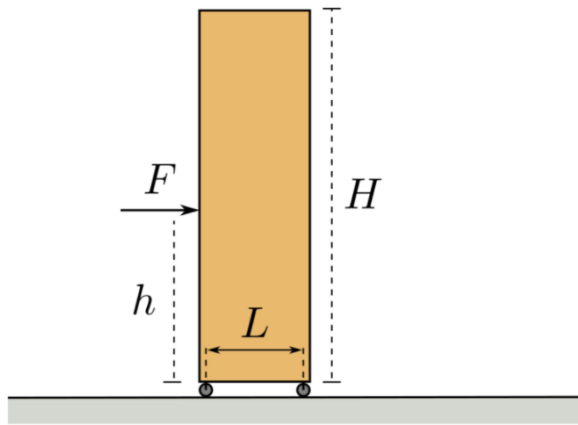
$$\Delta t = \frac{3 \times (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (2,5 \times 10^{-3} \text{ T})} \approx 6,8 \times 10^{-9} \text{ s}\quad (56)$$

**Resposta: A colisão do pósitron com o elétron ocorre aproximadamente  $6,8 \times 10^{-9}$  s após o decaimento.**

■

8. Uma prateleira vazia de massa  $25,0 \text{ kg}$ , altura  $H = 1,80 \text{ m}$  e largura  $L = 40,0 \text{ cm}$  está montada sobre pequenos rodízios ideais que rolam pelo piso liso com ação desprezível de forças dissipativas. A prateleira, inicialmente em repouso, é empurrada por uma força horizontal  $\vec{F}$ , de intensidade  $F = 100 \text{ N}$ , aplicada a uma altura  $h$ , conforme ilustrado na figura. Considere que os rodízios têm massa e dimensões desprezíveis e que o centro de massa da prateleira está em seu centro geométrico. Determine:

(a) a aceleração  $a$  do centro de massa da prateleira, em  $\text{m/s}^2$ ;



- (b) a menor altura  $h_{min}$ , em m, na qual  $\vec{F}$  pode ser aplicada sem que a prateleira tombe;  
(c) a maior altura  $h_{max}$ , em m, na qual  $\vec{F}$  pode ser aplicada sem que a prateleira tombe.

### Resolução

(a) Sabemos que o movimento do centro de massa (CM) de um corpo rígido, como é o caso da prateleira, é equivalente ao de uma partícula contendo toda a massa do corpo e sob a ação de todas as forças externas que atuam sobre o corpo. Como não há atrito, as únicas forças externas que atuam sobre a prateleira são a força peso, as normais que o piso exerce sobre os rodízios e a força  $\vec{F}$ . As forças peso e normais têm a direção vertical e se cancelam (equilíbrio nesta direção), de forma que o movimento horizontal da prateleira é promovido apenas pela força  $\vec{F}$ . Aplicando a segunda lei de Newton a essa direção, obtemos:

$$F = Ma_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{M} = \frac{100 \text{ N}}{25 \text{ Kg}} = 4 \text{ m/s}^2 \quad (57)$$

**RESPOSTA: A aceleração do CM da prateleira tem módulo  $4 \text{ m/s}^2$ , direção horizontal e aponta para a direita.**

■

(b) Para que não ocorra tombamento, a prateleira deve estar em equilíbrio de rotação com relação ao seu centro de massa. Para analisarmos as condições para que isso ocorra, devemos calcular os torques exercidos por cada força com relação ao CM.

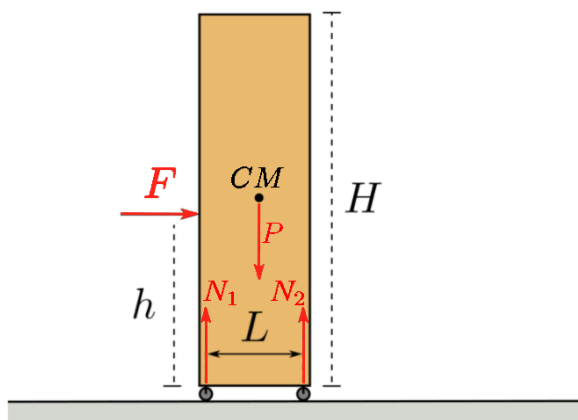
O torque de uma força genérica  $\vec{F}$  com relação a um ponto de referência é dado, em módulo, por:

$$\tau = Fd \quad (58)$$

onde  $d$  é a distância entre a linha de ação da força e o ponto de referência, conhecida como *braço de alavanca*. Além disso, consideramos como positivos torques que tendem a produzir rotações em sentido anti-horário com relação ao ponto de referência e como negativos quando tendem a produzir rotações em sentido contrário.

Para que a prateleira esteja em equilíbrio de rotação, a soma dos torques de todas as forças com relação ao seu CM deve ser nula. Note ainda que essa soma não precisa ser nula quando os torques são calculados com relação a outros pontos de referência pois, como vimos no item anterior, a prateleira tem um movimento de translação acelerado.

Vamos então prosseguir e calcular os torques com relação ao CM. Para isso, construímos o diagrama de forças da prateleira, mostrado na figura abaixo.  $\vec{P}$  é a força peso,  $\vec{N}_1$  e  $\vec{N}_2$  são as normais sobre os pares de rodilhas na traseira e na frente da prateleira, respectivamente, e a força  $\vec{F}$  também é indicada.



Como discutimos no item anterior, o equilíbrio na direção vertical nos assegura que

$$N_1 + N_2 = P \quad (59)$$

Os valores de  $N_1$  e  $N_2$  se ajustam para que a prateleira siga em seu movimento sem tombar dependendo do valor  $h$ , contudo há um limite para seus valores. Como a normal não pode ser negativa, temos a restrição  $0 \leq N_1 \leq P$ , e o mesmo ocorre para  $N_2$ . Essas restrições resultarão nos valores limite de  $h$  para o quais a prateleira não tombe.

Passemos aos torques. Como o peso atua sobre o próprio CM da prateleira, o torque desta força com relação ao CM é nulo. As demais forças exercem torques e o torque resultante tem módulo dado por:

$$\tau_{CM} = \tau_F + \tau_{N_1} + \tau_{N_2} = \left(\frac{H}{2} - h\right) F + \frac{L}{2} N_2 - \frac{L}{2} N_1 = 0 \quad (60)$$

onde levamos em conta que o CM está localizado a uma altura  $H/2$  acima do piso, supondo que a prateleira é homogênea.

Utilizando a relação  $N_2 = P - N_1$  vinda da Eq.59, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{H}{2} - h\right) F + \frac{L}{2} (P - 2N_1) &= 0 \\ h &= \frac{H}{2} + \frac{L}{2F} (P - 2N_1) \end{aligned} \quad (61)$$

A relação acima nos permite calcular  $h$  nos casos limite. O menor valor de  $h$  é dado pelo maior valor de  $N_1$  que, como discutimos acima, vale  $N_1^{max} = P$ . Nessa situação, teremos  $N_2 = 0$  e o par de rodilhas da frente está na iminência de perder contato com o piso, de forma que a prateleira está na iminência de tombar para trás. Portanto:

$$h_{min} = \frac{H}{2} - \frac{LP}{2F} = \frac{1,80 \text{ m}}{2} - \frac{0,400 \text{ m} \times 250 \text{ N}}{2 \times 100 \text{ N}} = 0,400 \text{ m} \quad (62)$$

onde utilizamos que  $P = Mg = 25 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 = 250 \text{ N}$  e convertemos a largura  $L$  para metros.

**RESPOSTA: A altura mínima vale  $h_{min} = 0,400 \text{ m}$ .**

■

(c) Analogamente, o maior valor de  $h$  é dado pelo menor valor de  $N_1$  que, como vimos acima, vale  $N_1^{min} = 0$ . Nessa situação, a rodinha de tras está na iminência de perder contato com o piso e a prateleira está na iminência de tombar para frente. Portanto:

$$h_{max} = \frac{H}{2} + \frac{LP}{2F} = \frac{1,80 \text{ m}}{2} + \frac{0,400 \text{ m} \times 250 \text{ N}}{2 \times 100 \text{ N}} = 1,40 \text{ m} \quad (63)$$

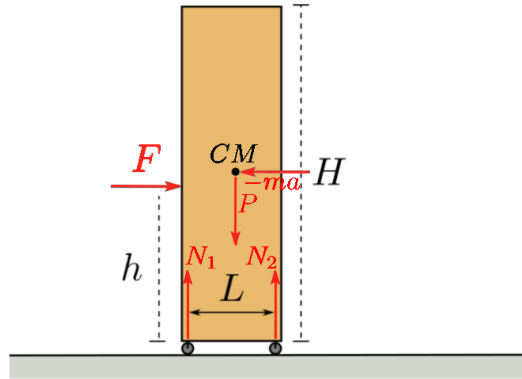
**RESPOSTA: A altura máxima vale  $h_{max} = 1,40 \text{ m}$**

■

### Observação: Referenciais não-inerciais

Como vimos acima, o CM da prateleira tem um movimento acelerado em razão da atuação da força  $\vec{F}$ . Dessa forma, um referencial atrelado ao movimento do CM da prateleira é não-inercial. Neste referencial, a prateleira deve estar em repouso a cada instante. Do ponto de vista da segunda lei de Newton, isto só poderia acontecer se pensarmos que a prateleira está sob a ação de uma força adicional fictícia  $-\vec{F}_{res} = -\vec{F}$ , conhecida como força de inércia, que tem origem não-inercial.

Ao incluirmos esta força fictícia, a força resultante sobre a prateleira se torna nula. Com isso, o torque independe do ponto de referência e, na situação de equilíbrio de rotação, deve ser sempre nulo. Para que isso aconteça, a força não-inercial deve atuar sobre o CM, como indicado na figura abaixo. Isto garante que o torque dela com relação ao CM é nulo, de forma que o torque total continua nulo. Com essa construção, poderíamos resolver o problema utilizando este referencial.



Em resumo, em um referencial não-inercial as leis de Newton devem ser modificadas. Devemos incluir as forças de inércia na análise da dinâmica de translação e rotação do corpo.