



Gabarito elaborado pela equipe do projeto de extensão *Elaboração de Material de Preparação para a Olimpíada Brasileira de Física (OBF)*, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IF-UFRJ).

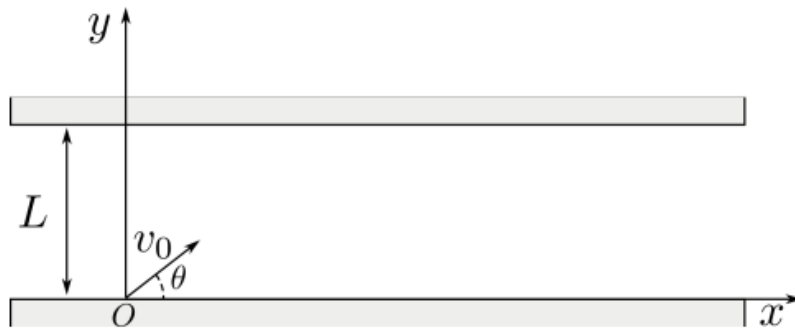
### Equipe

João Octavio Oliveira Cony    Lucas Bianchi Marcianesi    Maria Clara Vicente Coelho  
Sidney Natzuka Junior    Georgeana Arruda Limeira    Nathan Machado Vasconcelos

### Revisão

Prof. Marcos G. Menezes    Prof. Rodrigo B. Capaz

1. Em um laboratório de física, há uma pista plana e lisa, de largura  $L = 20,0$  cm, com pequenos furos por onde é forçada a passagem de jatos de ar. Sobre esta pista, desliza um pequeno disco de plástico com ação desprezível de forças dissipativas graças à camada de ar formada entre a superfície inferior do disco e a pista. Em estabelecimentos de diversão, as máquinas de hóquei de mesa apresentam um arranjo parecido com este. Considere que um disco é lançado do ponto  $O$ , no instante  $t = 0$ , obliquamente, com um ângulo  $\theta = 60$  e velocidade de módulo  $v_0 = 28,0$  cm/s, conforme ilustrado na figura. Suponha que o disco deslize pela superfície sem a ação de qualquer força resistiva e, ao colidir, ocorra apenas a inversão da componente  $y$  de sua velocidade. Usando o sistema de referências adotado na figura, passados 4,00 s, determine:
- (a) número de colisões com as paredes;
  - (b) distância percorrida pelo disco, em cm;
  - (c) módulo do deslocamento em relação à posição inicial, em cm.



### Resolução:

(a) Primeiro iremos achar as componentes cartesianas da velocidade de acordo com o sistema de referência da figura:

$$v_x = v_0 \cos(\theta) = (28,0 \text{ cm/s}) \cos(60) = (28 \text{ cm/s}) \times \frac{1}{2} = 14,0 \text{ cm/s} \quad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin(\theta) = (28,0 \text{ cm/s}) \sin(60) = (28 \text{ cm/s}) \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} \text{ cm/s} \quad (2)$$

Como a mesa é horizontal, não há força resultante agindo sobre o disco, ou seja, temos um movimento uniforme nas duas direções  $x$  e  $y$ . Assim, se não houvesse colisões entre o disco e as paredes, as funções horárias para o movimento do disco ao longo de cada eixo seriam:

$$x(t) = x_0 + v_x t = 14 t \quad (3)$$

$$y(t) = y_0 + v_y t = 14\sqrt{3} t \quad (4)$$

onde utilizamos a condição inicial de que o disco se encontra na origem em  $t = 0$  e as coordenadas são dadas em centímetros com  $t$  em segundos.

Como há colisões, a função horária dada pela eq. (4) **não** representa a posição do disco no eixo  $y$  em um instante de tempo  $t$ , pois a cada colisão o sentido da componente  $v_y$  da velocidade é invertido. Por outro lado, como seu módulo permanece constante, podemos dizer que a eq. (4) representa a distância total percorrida na direção do eixo  $y$  em um instante de tempo  $t$ .

Com isso, note que, em  $t = 4$  s, o disco terá percorrido uma distância vertical total igual a  $y(4)$ . Dividindo essa distância pela largura  $L$  da mesa, obtemos o número  $N$  de colisões:

$$N = \frac{y(4)}{L} = \frac{(14\sqrt{3} \text{ cm/s}) \cdot (4,00 \text{ s})}{20,0 \text{ cm}} \approx 4,76 \quad (5)$$

O valor decimal indica que o disco não completou a 5ª colisão, portanto sofreu um total de 4 colisões no intervalo considerado.

**Resposta: O disco realizou 4 colisões depois de passados 4,00 segundos.**

■

(b) Observe que a trajetória do disco após uma colisão é espelhada com relação à trajetória incidente, uma vez que no instante da colisão ocorre uma inversão da componente vertical da velocidade. Como essa inversão não altera o módulo  $v_0$  da velocidade, podemos utilizar o movimento do disco na ausência de colisões, como definido pelas funções horárias nas eqs. 3 e 4, para obter a distância total percorrida. Note ainda que elas resultam na seguinte função horária:

$$s = v_0 t \quad (6)$$

que dá a distância  $s$  percorrida ao longo da trajetória retilínea em um instante  $t$ . Portanto, em  $t = 4$  s, obtemos:

$$s = v_0 t = (28,0 \text{ cm/s}) \cdot (4,00 \text{ s}) = 112 \text{ cm} \quad (7)$$

**Resposta: O disco percorreu um total de 112 m depois de passados 4,00 segundos.**

■

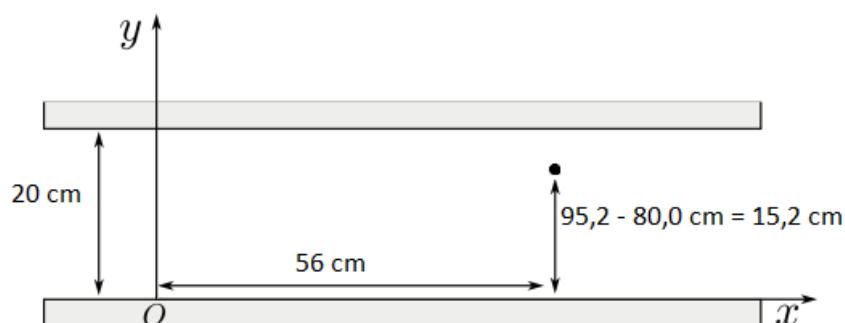
(c) Como o deslocamento é uma grandeza vetorial, devemos descobrir a posição exata do disco no instante  $t = 4$  s. Para isso, basta encontrarmos as suas coordenadas  $x$  e  $y$ . Como o movimento ao longo de  $x$  não é alterado pelas colisões, podemos utilizar imediatamente a equação 3 para obter a coordenada correspondente:

$$x(4) = (14,0 \text{ cm/s}) \cdot (4,00 \text{ s}) = 56,0 \text{ cm} \quad (8)$$

A situação é um pouco mais complicada para o eixo  $y$ , como já vimos nos itens anteriores. O valor  $y(4)$  nos dá a distância total percorrida ao longo de  $y$ :

$$y(4) = (14\sqrt{3} \text{ cm/s}) \cdot (4,00 \text{ s}) \approx 95,2 \text{ cm} \quad (9)$$

Sabendo que a primeira colisão ocorre na borda de cima da mesa é fácil ver que a quarta colisão, que é a última que ocorre no intervalo considerado, ocorre na borda de baixo. Assim, no instante da quarta colisão já foram percorridos  $20,0 \times 4 \text{ cm} = 80,0 \text{ cm}$  na direção do eixo  $y$  e o disco se encontra na coordenada  $y = 0$ . Além disso, vimos na equação acima que, depois de decorridos 4 segundos, o disco terá percorrido uma distância total de  $95,2 \text{ cm}$  na direção do eixo  $y$ . Com isso, sua coordenada  $y$  real nesse instante será  $y = 95,2 - 80,0 \text{ cm} = 15,2 \text{ cm}$ , como mostra a figura abaixo:



Portanto, o vetor deslocamento tem origem no ponto  $(0,0)$  e extremidade no ponto  $(56,0, 15,2)$ , e seu módulo  $r$  será:

$$r = \sqrt{(56,0)^2 + (15,2)^2} \approx 58,0 \text{ cm} \quad (10)$$

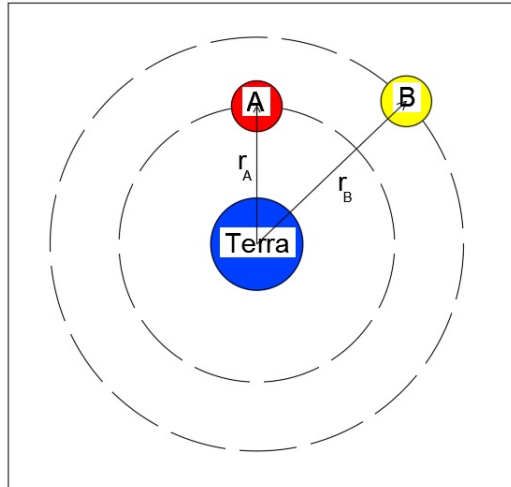
**Resposta: O vetor deslocamento do disco tem um módulo de 58,0 cm depois de passados 4,00 segundos.**

■

2. Considere dois pequenos satélites, A e B, de mesma massa. Ambos estão em órbitas circulares em torno da Terra, mas o raio da órbita do satélite B é 50 % maior que a do satélite A. Sejam  $E_{c,A}$  e  $E_{c,B}$ , respectivamente, as energias cinéticas de cada satélite. Use as leis de Kepler e seus conhecimentos de física para determinar a razão  $E_{c,B}/E_{c,A}$ .

**Resolução:**

A figura abaixo mostra uma representação do problema. A razão entre as energias cinéticas  $E_{c,B}/E_{c,A}$



é dada por:

$$\frac{E_{c,B}}{E_{c,A}} = \frac{\frac{m_B v_B^2}{2}}{\frac{m_A v_A^2}{2}} \quad (11)$$

onde  $m_A$  e  $m_B$  são as massas dos satélites e  $v_A$  e  $v_B$  são suas velocidades escalares. Como as massas são iguais, temos  $m_A = m_B = m$  e essa razão se simplifica para:

$$\frac{E_{c,B}}{E_{c,A}} = \frac{v_B^2}{v_A^2} \quad (12)$$

O movimento de ambos os satélites é circular, sendo sustentado pela força gravitacional exercida pela Terra sobre eles. Assim, a velocidade escalar orbital é constante e pode ser escrita como:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \quad (13)$$

pois, em um período  $T$  de revolução, tempo necessário para um satélite dar uma volta completa ao redor da Terra, o deslocamento equivale ao comprimento da órbita circular,  $2\pi r$ .

Com isso:

$$\begin{aligned} \frac{v_B^2}{v_A^2} &= \left( \frac{\frac{2\pi r_B}{T_B}}{\frac{2\pi r_A}{T_A}} \right)^2 \\ \therefore \frac{v_B^2}{v_A^2} &= \left( \frac{r_B}{r_A} \right)^2 \cdot \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Resta então encontrar a razão entre os quadrados dos períodos de A e de B. Podemos fazer isso utilizando a 3ª lei de Kepler ou lei dos períodos. Como os dois satélites orbitam em torno do mesmo astro, podemos escrever:

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \quad \therefore \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^2 = \left( \frac{r_A}{r_B} \right)^3 \quad (15)$$

Substituindo esse resultado na Eq. 14, obtemos:

$$\frac{v_B^2}{v_A^2} = \left( \frac{r_B}{r_A} \right)^2 \cdot \left( \frac{r_A}{r_B} \right)^3 = \frac{r_A}{r_B} \quad (16)$$

Finalmente, de acordo com o enunciado,  $r_B$  é 50 % maior que  $r_A$ . Assim:

$$r_B = 1,5 r_A = \frac{3}{2} r_A \quad (17)$$

e portanto:

$$\frac{v_B^2}{v_A^2} = \frac{r_A}{\frac{3}{2}r_A} \quad \therefore \quad \frac{v_B^2}{v_A^2} = \frac{2}{3} \quad (18)$$

Como já vimos acima, esta razão coincide com a razão entre as energias cinéticas, logo:

$$\frac{E_{c,B}}{E_{c,A}} = \frac{v_B^2}{v_A^2} = \frac{2}{3} \approx 0,67 \quad (19)$$

**Resposta:** A razão entre as energias cinéticas de cada satélite vale  $\frac{2}{3} \approx 0,67$ .

■

3. Uma estudante de física resolveu analisar uma filmagem, com som e imagem, feita de uma exibição de fogos de artifícios. A filmadora eletrônica que utilizou gravou o vídeo em 30 FPS, que é a sigla, em inglês, para 30 quadros (frames) por segundo. Isto quer dizer que o aparelho tira 30 fotografias por segundo em intervalos de tempo igualmente espaçados. Depois, quando se assiste à filmagem, as imagens são exibidas também na taxa de 30 FPS e, por isso, temos a impressão de ver uma cena em movimento a partir de uma sequência de imagens estáticas. Existem vários aplicativos de edição de vídeos, muitos deles de software livre, que podem ser usados para analisar uma filmagem quadro-a-quadro. Em geral, estes aplicativos também mostram representações gráficas da intensidade da onda sonora que chega à filmadora durante a gravação. Ao analisar a filmagem da explosão de um morteiro, a estudante percebe que o som da explosão aparece 52 quadros depois do quadro com o brilho da explosão. Com seus conhecimentos de física e estas informações, ela conseguiu estimar a distância  $d$  entre o morteiro no momento da explosão e a sua filmadora. Qual o valor de  $d$ , em metros, que ela estimou?

**Resolução:**

O intervalo de quadros entre o brilho da explosão e a percepção do som da explosão resulta da diferença de velocidade de propagação da luz  $c$  e do som  $v$ . Como  $c \gg v$ , podemos considerar, em primeira aproximação, que o tempo gasto pela luz para percorrer a distância  $d$  é desprezível em confronto com o tempo gasto pelo som para percorrer a mesma distância. Podemos escrever este tempo como:

$$\Delta t = \frac{d}{v} \quad (20)$$

onde  $v = 340$  m/s é a velocidade do som no ar.

De acordo com a nossa aproximação, este tempo deve corresponder ao intervalo relativo à captura de  $N = 52$  quadros pela câmera entre os registros do brilho e do som da explosão. Assim, podemos utilizar a taxa constante de captura da câmera,  $f = 30$  frames/s (número de quadros por unidade de tempo) para calcular  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{N}{f} = \frac{52 \text{ frames}}{30 \text{ frames/s}} = \frac{52}{30} \text{ s} \quad (21)$$

Combinando as duas equações acima e substituindo o valor de  $v$ , obtemos:

$$d = 340 \text{ m/s} \cdot \frac{52}{30} \text{ s} \approx 589 \text{ m} \quad (22)$$

**Resposta:** A distância entre o morteiro e a filmadora no momento da explosão vale aproximadamente 589 m.

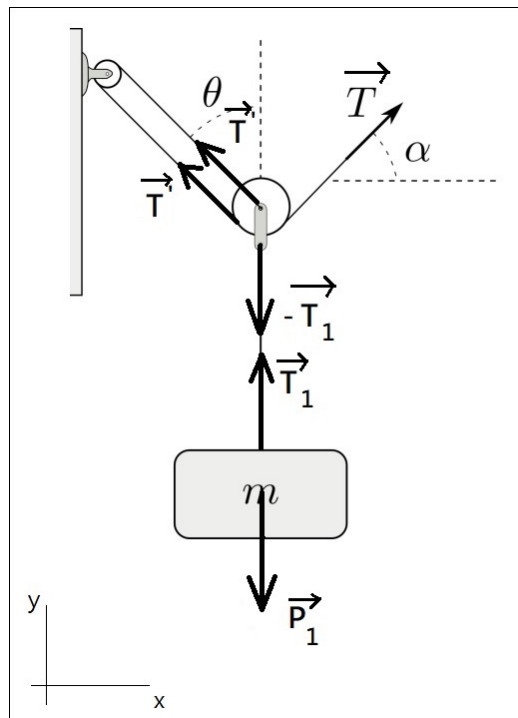
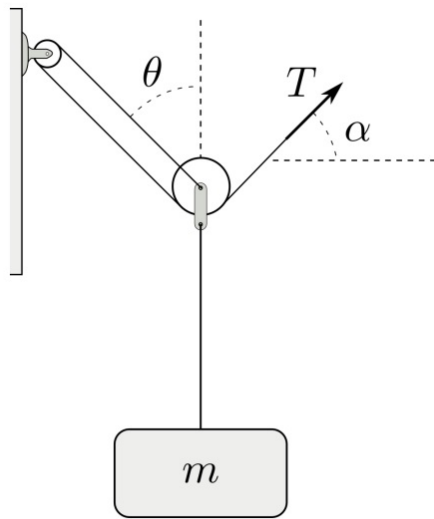
**OBS:** Se levássemos em conta o intervalo de tempo gasto pela luz para percorrer a distância  $d$ , obteríamos  $d = v\Delta t / (1 - v/c)$ . Note como o fator de correção no denominador vale aproximadamente 1, uma vez que  $v \ll c$ .

■

4. Uma caixa de  $m = 60$  kg é suspensa pelo sistema de polias representado na figura. Os trechos de corda entre as duas polias são paralelos e formam um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com a vertical. Na extremidade da corda, é aplicada uma força  $\vec{T}$ , de módulo  $T$ , e que faz um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Considerando que o sistema está em equilíbrio estático e as cordas e polias são ideais, determine:

- (a) o ângulo  $\alpha$ , em graus;  
(b) a intensidade da força  $T$ , em N.

**Resolução:**



- (a) Como o sistema está em equilíbrio estático, a força resultante que atua sobre cada parte do sistema é nula. Além disso, como as cordas e polias são ideais, as tensões atuantes em todos os trechos de uma determinada corda têm o mesmo módulo. Com isso, podemos construir os diagramas de forças da caixa e da polia central, como mostra a figura abaixo:

Utilizando o sistema de coordenadas definido na figura, podemos decompor as forças ao longo dos eixos  $X$  e  $Y$  e aplicar a condição de equilíbrio ao longo de cada um desses eixos.

**Equilíbrio ao longo de  $X$ .** Neste caso, basta analisarmos a polia central, uma vez que não há forças horizontais sobre a caixa. A condição de equilíbrio dá:

$$-2T' \sin \theta + T \cos \alpha = 0 \quad (23)$$

Como mencionamos acima, como a corda em contato com a polia central é ideal, devemos ter  $T' = T$ . Assim, utilizando ainda que  $\theta = 30^\circ$ , obtemos:

$$\cos \alpha = 2 \sin 30^\circ = 1 \quad \therefore \quad \alpha = 0^\circ \quad (24)$$

**Resposta:** O ângulo  $\alpha$  vale  $0^\circ$ , ou seja, a força  $\vec{T}$  é horizontal.

- (b) Agora, vamos analisar as condições de equilíbrio ao longo de  $Y$ . Para a polia central, obtemos:

$$2T' \cos \theta + T \sin \alpha - T_1 = 0 \quad (25)$$

e para o bloco:

$$T_1 - P_1 = 0 \quad \therefore \quad T_1 = mg \quad (26)$$

Combinando as equações acima, utilizando mais uma vez que  $T' = T$  e utilizando ainda que  $\alpha = 0^\circ$ , como obtido em (a), segue:

$$2T \cos 30^\circ + T \sin 0^\circ = mg$$

$$T = \frac{mg}{\sqrt{3}} \quad (27)$$

Substituindo  $m = 60 \text{ kg}$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$  acima, vem:

$$T = \frac{600}{\sqrt{3}} = \frac{600\sqrt{3}}{3} = 200\sqrt{3} \text{ N} \quad (28)$$

De acordo com as instruções da prova, devemos utilizar  $\sqrt{3} \approx 1,7$ . Portanto:

$$T \approx 200 \cdot 1,7 = 340 \text{ N} \quad (29)$$

**Resposta:** A intensidade de  $\vec{T}$  é 340 N.

■

5. Uma ducha com água aquecida eletricamente, de potência 4,20 kW, ou seja, que utiliza energia elétrica a uma taxa 4,20 kJ por segundo, liga automaticamente quando a torneira é aberta permitindo uma vazão mínima de 3,00 litros de água por minuto. A partir daí, à medida que a torneira é aberta para permitir vazões maiores, o aquecedor elétrico permanece operando à mesma potência. A vazão máxima desta ducha é de 6,60 litros de água por minuto.

(a) Qual a temperatura máxima possível da água liberada pela ducha em um dia de inverno, em C, no qual a água que entra na ducha está a 15,0 C?

(b) Se a ducha está ligada, qual a temperatura mínima possível da água liberada em um dia de verão, em C, no qual a água que entra na ducha está a 24,0 C?

**Resolução:**

(a) Da equação do calor sensível, sabemos que:

$$\Delta Q = \Delta m c (T_f - T_i) \quad (30)$$

onde  $\Delta m$  representa a massa de uma substância,  $c$  o seu calor específico e  $T_i$  e  $T_f$  são as temperaturas inicial e final dela, respectivamente. Por esta equação, vemos que para uma mesma quantidade de calor fornecida ( $\Delta Q > 0$ ), se diminuirmos a massa, teremos um aumento na diferença de temperatura. Assim, concluímos que a temperatura final é máxima quando a vazão for mínima pois, conforme a vazão diminui, menor é o volume e, conseqüentemente, menor é a massa de água deslocada em um mesmo intervalo de tempo.

De fato, se dividirmos os dois lados da equação (30) por um intervalo de tempo  $\Delta t$  e usarmos a definição de densidade  $\rho = \Delta m / \Delta V$ , obtemos:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho c (T_f - T_i) \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (31)$$

Note que  $\Delta Q / \Delta t$  é a potência  $P$  fornecida pelo chuveiro através do efeito Joule, e  $\Delta V / \Delta t$  é a vazão  $\Phi$  do chuveiro. Portanto, podemos escrever:

$$P = \rho c \Phi (T_f - T_i) \quad (32)$$

O chuveiro tem uma potência de 4,20 kW e para obter a temperatura máxima, trabalharemos com a vazão mínima, que é de 3,00 L/min. Portanto, já conhecemos a potência ( $P$ ), a vazão ( $\Phi$ ) e a temperatura inicial da água ( $T_i$ ). Além disso, são dados no formulário a densidade e o calor específico da água. Ou seja, só precisaremos usar esses dados na equação (32) para obter a temperatura final máxima da água, lembrando de tomar cuidado com as unidades.

Será conveniente converter a potência de kW = 1000 J/s para cal/s, pois o calor específico e a densidade da água foram dados em cal/gC e g/cm<sup>3</sup>, respectivamente. Sabendo que 1 cal = 4,2 J, escrevemos:

$$P = 4,2 \text{ kW} = \frac{4200 \text{ J}}{\text{s}} = \frac{1000 \text{ cal}}{\text{s}} \quad (33)$$

Podemos converter também a vazão para uma unidade mais conveniente, lembrando que 1min = 60 seg e 1L = 10<sup>3</sup> cm<sup>3</sup>

$$\Phi = \frac{3 \text{ L}}{1 \text{ min}} = \frac{3000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 50 \text{ cm}^3/\text{s} \quad (34)$$

Usando os dados convertidos na equação (32), obtemos:

$$1000 \frac{\text{cal}}{\text{s}} = \left(1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \left(1 \frac{\text{cal}}{\text{gC}}\right) \left(50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right) (T_{max} - 15,0 \text{ C}) \quad (35)$$

Simplificando as unidades e dividindo os dois lados por 50 obtemos:

$$20,0 \text{ C} = T_{max} - 15,0 \text{ C} \quad (36)$$

Portanto:

$$T_{max} = 35,0 \text{ C} \quad (37)$$

**Resposta: A temperatura final máxima da água é 35,0 C.**

■

(b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, a fim de obtermos a temperatura final mínima, trabalharemos com a ducha na vazão máxima (6,60 L/min).

Como a potência não muda com a vazão, ainda teremos  $P = 1000 \text{ cal/s}$ , então basta converter a vazão:

$$\Phi = \frac{6,60\text{L}}{1\text{min}} = \frac{6600\text{cm}^3}{60\text{s}} = 110\text{cm}^3/\text{s} \quad (38)$$

Usando os novos dados na equação (32):

$$1000 \frac{\text{cal}}{\text{s}} = \left(1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \left(1 \frac{\text{cal}}{\text{gC}}\right) \left(110 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right) (T_{min} - 24,0 \text{ C}) \quad (39)$$

Simplificando as unidades, dividindo os dois lados por 110 e considerando  $\frac{1000}{110} \approx 9,1$ :

$$9,1\text{C} \approx T_{min} - 24,0 \text{ C} \quad (40)$$

Portanto:

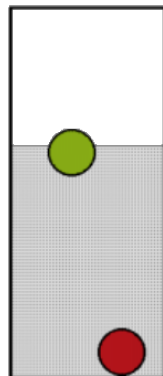
$$T_{min} \approx 33,1\text{C} \quad (41)$$

**Resposta: A temperatura final mínima da água é 33,1 C.**

■

6. Um posto de gasolina instalou densímetros em suas bombas para atestar a qualidade do produto. Os combustíveis utilizados nos automóveis são misturas de hidrocarbonetos, cuja densidade varia com a composição, isto é, com a quantidade de cada componente da mistura. Assim, se a mistura for alterada pelo acréscimo de alguma substância destinada a dar volume ao combustível, o densímetro acusará a adulteração.

O modelo de densímetro adotado pelo posto utiliza duas esferas plásticas ocas de mesmos volumes e massas, de cores diferentes, contendo um sólido particulado, que serve de lastro. A massa de lastro dentro de cada uma das esferas é diferente, e calculada para que uma das esferas flutue e a outra permaneça no fundo, conforme é ilustrado na figura. Além disso, elas devem permanecer em suas posições originais ainda que o combustível sofra uma variação de densidade dentro de uma certa faixa de tolerância determinada pelo distribuidor. No entanto, se a densidade do combustível é aumentada por uma diferença maior do que a tolerável, a esfera que está embaixo sobe. Se, ao contrário, a densidade do combustível é diminuída, a esfera de cima desce.



Considere um densímetro em que as esferas, de volumes iguais a  $V$ , devem manter suas posições relativas quando a densidade do combustível varia em 5,00% para mais ou para menos. Suponha que o

combustível é adulterado de forma que a esfera de baixo está na situação limite em que começa a subir. Seja  $v$  o volume da parte da esfera de cima que está emersa, determine a razão  $v/V$ .

### Resolução

Sabendo que as esferas devem manter suas posições relativas dentro de um intervalo de densidades, podemos inferir que, no limite inferior deste intervalo, a esfera de cima (mais leve) deve estar na iminência de afundar. Para densidades menores que esse valor, teremos as duas esferas no fundo do densímetro, indicando adulteração no combustível. Da mesma forma, no limite superior, a esfera de baixo se encontra na iminência de subir. Se o líquido estiver mais denso que esse valor limite, as duas esferas flutuarão.

Seja  $\rho$  a densidade tomada como padrão para o combustível. Vamos chamar ainda a esfera flutuando de  $A$  e a esfera no fundo de  $B$ . Como o densímetro tem uma sensibilidade de 5,00%, a esfera  $A$  deve estar na iminência de cair quando a densidade do combustível for  $0,95\rho$ , ou seja, ela flutua estando quase submersa por inteira,  $V_{sub} \approx V$ . Nessa situação limite, de acordo com a primeira lei de Newton, as forças peso e empuxo que atuam sobre a esfera devem ter o mesmo módulo. Assim:

$$\begin{aligned} E &= P \\ 0,95\rho V_{sub} g &= m_A g \\ m_A &= 0,95\rho V_{sub} = 0,95\rho V \end{aligned} \quad (42)$$

Por outro lado, se o combustível tem uma densidade de  $1,05\rho$ , no limite oposto, a esfera  $B$  está na iminência de sair do fundo. Nessa situação, o enunciado nos informa que volume submerso da esfera  $A$  é  $V_{sub} = v$ . Analisemos seu equilíbrio novamente:

$$\begin{aligned} E &= P \\ 1,05\rho v g &= m_A g \end{aligned} \quad (43)$$

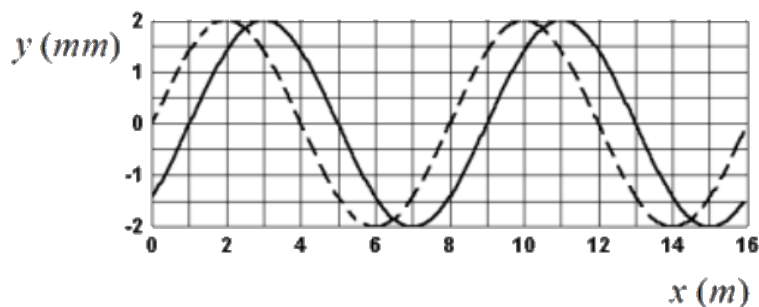
Substituindo o valor de  $V_{sub}$  do enunciado e o valor de  $m_A$  obtido acima, encontramos:

$$\begin{aligned} 1,05\rho v g &= 0,95\rho V g \\ \frac{v}{V} &= \frac{0,95}{1,05} \approx 0,90 \end{aligned} \quad (44)$$

**RESPOSTA: A razão  $v/V$  vale aproximadamente 0,90.**

■

7. A figura abaixo representa dois instantâneos de uma mesma onda mecânica transversal senoidal que se propaga para a direita em uma corda esticada. Sabendo que o intervalo de tempo que separa os dois instantâneos é de 0,05 s, determine a velocidade transversal máxima da onda, em m/s.



### Resolução

Seja  $y(x, t)$  o perfil da onda. Como a onda se move para a direita, podemos tomar como  $t = 0$  o instante quando o perfil é representado pela linha tracejada e  $t = 0,05$  o instante quando ele é representado pela linha contínua. Da figura, podemos ver que  $y(0, 0) = 0$ , de forma que podemos representar a onda por uma função senoide sem fase inicial, ou seja:

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t) \quad (45)$$

onde  $A$  é a amplitude da onda,  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda e  $\omega$  é a frequência angular.  $\lambda$  é o comprimento de onda.



A velocidade transversal  $v_t$  da onda é a velocidade de um dado ponto da corda ao longo da direção  $Y$  em uma dada posição do eixo  $X$  e instante  $t$ . Para calcular seu valor máximo, podemos tomar um ponto genérico da corda, por exemplo  $x = 0$ . Neste caso, a equação acima se reduz a um movimento harmônico simples em uma dimensão:

$$y(0, t) = A \operatorname{sen}(-\omega t) = -A \operatorname{sen}(\omega t) \quad (46)$$

Considere agora um intervalo de tempo  $\Delta t$  consideravelmente pequeno ( $\omega \Delta t \ll 1$ ). Vamos calcular a velocidade média transversal entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  como uma aproximação para o valor instantâneo. Assim:

$$v_y(0, t) \approx \frac{y(0, t + \Delta t) - y(0, t)}{\Delta t} = \frac{-A \operatorname{sen}(\omega t + \omega \Delta t) - (-A \operatorname{sen}(\omega t))}{\Delta t} \quad (47)$$

Utilizando a fórmula do seno da soma ( $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$ ), obtemos:

$$v_y(0, t) \approx \frac{-A (\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega \Delta t) + \operatorname{sen}(\omega \Delta t)\cos(\omega t)) + A \operatorname{sen}(\omega t)}{\Delta t} \quad (48)$$

Lembrando que  $\Delta t$  é pequeno, podemos utilizar as aproximações  $\operatorname{sen}(\omega \Delta t) \approx \omega \Delta t$  e  $\cos(\omega \Delta t) \approx 1$ . Com isso:

$$v_y(0, t) \approx \frac{-A (\operatorname{sen}(\omega t) + (\omega \Delta t)\cos(\omega t)) + A \operatorname{sen}(\omega t)}{\Delta t} = -\omega A \cos(\omega t) \quad (49)$$

Note que  $\Delta t$  é cancelado na passagem para a última igualdade, de forma que a expressão acima dá o valor exato da velocidade instantânea em  $x = 0$  no limite em que  $\Delta t$  vai a zero. Finalmente, como o cosseno é limitado entre -1 e 1, concluímos que o valor máximo da velocidade transversal é  $v_t^{max} = \omega A$ . Resta então determinar  $\omega$  e  $A$ .

A amplitude é definida como metade da distância vertical entre um pico e um vale. Como os picos estão em  $y = 2$  mm e os vales em  $y = -2$  mm, concluímos que a amplitude da onda vale  $A = 2$  mm.

A velocidade angular pode ser obtida por meio das relações:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} \quad (50)$$

onde  $f$  é a frequência da onda e  $v = \lambda f$  é a velocidade de propagação. Do gráfico, podemos ver que a distância entre dois picos sucessivos é de 8 m, portanto o comprimento de onda é  $\lambda = 8$  m. Para determinar a velocidade de propagação, perceba que a onda se move  $\Delta x = 1$  m para a direita entre os dois instantes representados. Assim:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1 \text{ m}}{0,05 \text{ s}} = 20 \text{ m/s} \quad (51)$$

Substituindo esses valores na expressão da velocidade transversal máxima e fazendo as conversões de unidades apropriadas, encontramos:

$$v_t^{max} = \omega A = \frac{2\pi v A}{\lambda} = \frac{2 \times 3 \times 20 \text{ m/s} \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}}{8 \text{ m}} = 3,0 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad (52)$$

**RESPOSTA: A velocidade transversal máxima da onda é  $3,0 \times 10^{-2} \text{ m/s} = 30 \text{ mm/s}$ .**

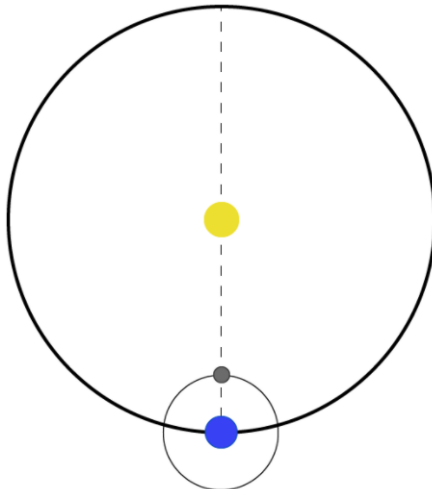
■

8. Considere um sistema planetário hipotético formado por uma única estrela em torno da qual orbita um planeta que possui uma única lua (satélite natural). Neste sistema, as órbitas do planeta em torno da estrela e da lua em torno do planeta são circulares e coplanares e o período de translação do planeta em torno da estrela é de  $T_p = 360$  dias. Sabendo que, após um eclipse solar, o próximo eclipse lunar ocorre 30 dias depois, determine o período orbital da lua em torno do planeta, em dias, nos seguintes casos.

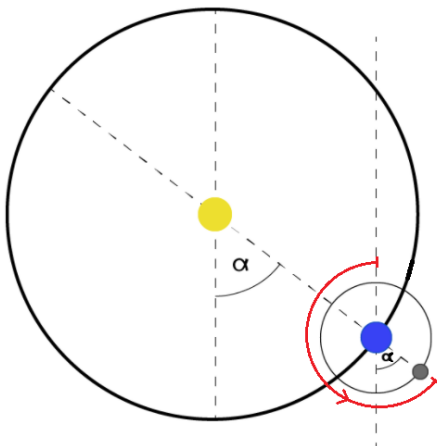
- (a) O planeta e a sua lua percorrem suas órbitas no mesmo sentido, por exemplo, ambas no sentido anti-horário.  
 (b) O planeta e a sua lua percorrem suas órbitas em sentidos opostos.

**Resolução:**

A figura abaixo mostra a configuração inicial do sistema para os dois casos (eclipse solar). A estrela é representada pelo disco amarelo, o planeta pelo disco azul e a lua pelo disco cinza. As órbitas do planeta e da lua (sem especificação do sentido) são representadas pelos círculos preto e cinza, respectivamente.



(a) Considerando as duas órbitas no sentido anti-horário, passamos para a configuração de eclipse lunar mostrada na figura abaixo.



Se em 360 dias o planeta dá uma volta completa em torno da estrela e, portanto, descreve um ângulo de  $2\pi$  rad, em 30 dias, que é o tempo gasto para chegarmos nessa nova configuração, ele descreverá um ângulo:

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{30}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \tag{53}$$

Neste caso em que as duas órbitas são no sentido anti-horário o deslocamento angular da lua, indicado pelo pelo arco em vermelho na imagem acima é:

$$\Delta\theta = \pi + \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ rad} \tag{54}$$

Com isso podemos calcular a velocidade angular da lua:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{7\pi}{6}}{30 \text{ dias}} = \frac{7\pi}{180} \frac{1}{\text{dias}} \tag{55}$$

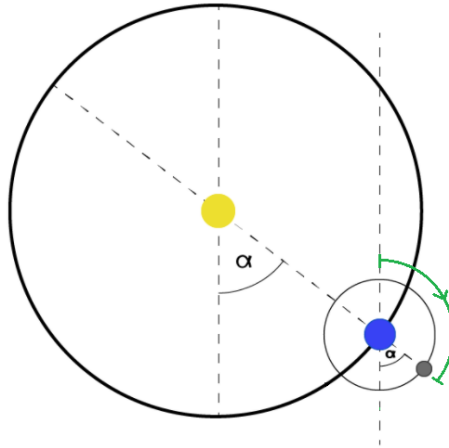
E agora calculando o período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \times 180}{7\pi} \text{ dias} \approx 51 \text{ dias} \tag{56}$$

**Resposta: Considerando as duas órbitas em sentidos opostos, vemos que o período orbital da lua em torno do planeta é de aproximadamente 51 dias.**

■

(b) Considerando a órbita do planeta no sentido anti-horário e a de sua lua no sentido horário, passamos para a seguinte configuração (eclipse lunar):



Assim como no caso do item anterior, a passagem do estado inicial de eclipse solar para o estado de eclipse lunar ocorre em 30 dias, então temos novamente:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad (57)$$

No entanto, neste caso em que as duas órbitas ocorrem em sentidos contrários, o deslocamento angular da lua, indicado pelo arco em verde na imagem acima é:

$$\Delta\theta = \pi - \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \quad (58)$$

Com isso, calculamos novamente a velocidade angular da lua:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{30 \text{ dias}} = \frac{5\pi}{180} \frac{1}{\text{dias}} \quad (59)$$

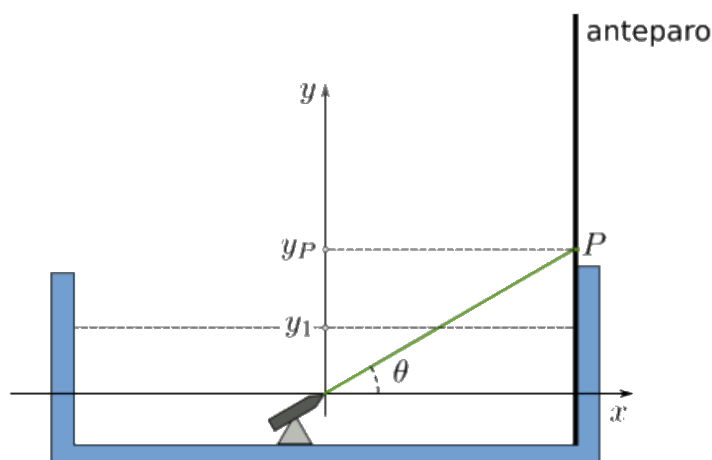
E agora calculando o período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \times 180}{5\pi} \text{ dias} = 72 \text{ dias} \quad (60)$$

**Resposta: Considerando as duas órbitas em sentidos opostos, vemos que o período orbital da lua em torno do planeta é de 72 dias.**

■

9. Uma fonte de radiação laser que pode ser submergida é fixada no fundo de uma cuba inicialmente vazia. A fonte é orientada na direção de um anteparo vertical de modo que o feixe laser emitido faz um ângulo  $\theta = 60^\circ$  com a horizontal. Adotando o sistema de referências da figura, observa-se que, quando a fonte é ligada, o feixe atinge o anteparo no ponto  $P$  de coordenada  $y_p = 50$  cm. Depois, quando a cuba é preenchida com um líquido de índice de refração  $n = \sqrt{2}$  até um nível  $y_1 = 10$  cm, verifica-se que o feixe atinge o anteparo em um ponto  $Q$  (não representado na figura).

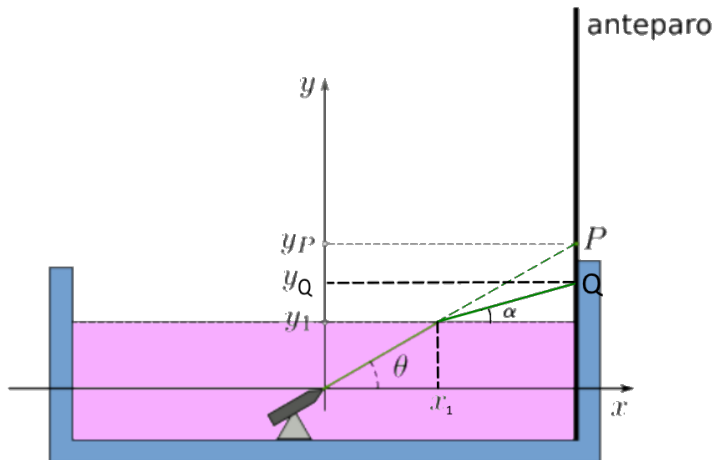


(a) Qual a coordenada  $y_Q$  do ponto  $Q$ , em cm?

(b) O arranjo experimental permite deslocar o aparelho laser ao longo do eixo  $x$ . Mantendo-se a orientação do feixe, para que coordenada  $x$ , em cm, deve ser movido o ponto de origem do feixe de modo que o mesmo atinja o ponto  $P$  com a cuba preenchida com o líquido?

### Resolução

(a) Após a cuba ser preenchida pelo líquido, a luz emitida pela fonte será refratada ao atravessar a interface entre o líquido e o ar. Esta nova situação é mostrada na figura abaixo.



Antes de analisarmos a refração, vamos descobrir a coordenada  $x_1$  do ponto onde a luz encontra a interface. Observando a figura, como conhecemos o ângulo  $\theta$  e a coordenada  $y_1$ , podemos escrever:

$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{\tan 60^\circ} = \frac{10 \text{ cm}}{\sqrt{3}} \approx 5,9 \text{ cm} \quad (61)$$

Vamos determinar ainda a coordenada  $x_P = x_Q$  comum dos pontos  $P$  e  $Q$  que estão sobre o anteparo. Como conhecemos  $y_P$ , podemos empregar o mesmo raciocínio para obter:

$$\tan \theta = \frac{y_P}{x_P} \Rightarrow x_P = \frac{y_P}{\tan 60^\circ} = \frac{50 \text{ cm}}{\sqrt{3}} \approx 29,4 \text{ cm} \quad (62)$$

Finalmente, vamos analisar a refração através da interface. Devemos tomar cuidado com os ângulos a serem inseridos na lei de Snell, já que os ângulos  $\theta$  e  $\alpha$  mostrados na figura são medidos com relação à horizontal e na lei de Snell os ângulos são medidos com relação à normal da interface, que nesse caso é a vertical. Assim, considerando que o índice de refração do ar vale 1, podemos escrever:

$$n \sin(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \alpha) \quad (63)$$

Lembrando que, para qualquer ângulo  $\theta$ , vale a relação  $\sin(90 - \theta) = \cos(\theta)$  e substituindo  $n = \sqrt{2}$ , obtemos:

$$\sqrt{2} \cos \theta = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (64)$$

de onde concluímos que  $\alpha = 45^\circ$ .

Com essa informação, podemos determinar a coordenada  $y_Q$  empregando um raciocínio análogo ao utilizado anteriormente. Observando o triângulo retângulo associado ao ângulo  $\alpha$ , podemos escrever:

$$\tan \alpha = \frac{y_Q - y_1}{x_Q - x_1} \quad (65)$$

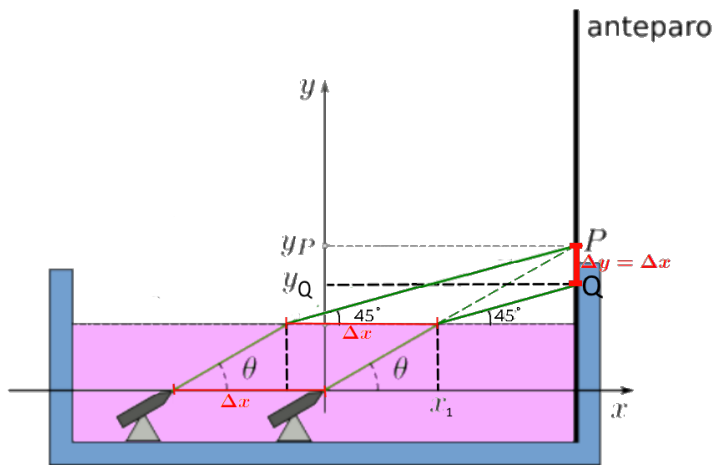
Por outro lado, sabemos também que  $\tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$ . Assim:

$$\begin{aligned} y_Q - y_1 &= x_Q - x_1 \\ y_Q &= x_Q - x_1 + y_1 \\ y_Q &\approx (29,4 - 5,9 + 10,0) \text{ cm} = 33,5 \text{ cm} \end{aligned} \quad (66)$$

**RESPOSTA: A coordenada  $y_Q$  do ponto  $Q$  vale 33,5 cm.**

■

(b) Da nossa análise anterior, é evidente que devemos deslocar a fonte para a esquerda para que o feixe volte a alcançar o ponto  $P$  sobre o anteparo. As situações antes e depois do deslocamento são mostradas



na figura abaixo.

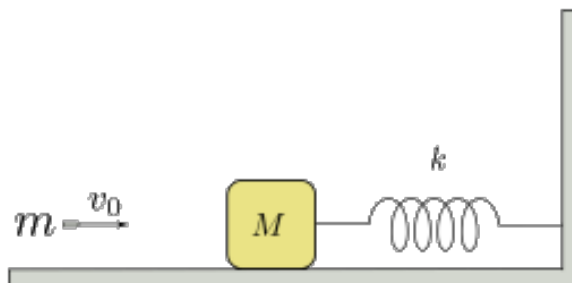
Como o ângulo  $\theta$  do feixe com relação à horizontal é fixado, a configuração da refração na interface não é alterada e  $\alpha$  permanecerá o mesmo. Assim, como  $\tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$ , o deslocamento vertical adicional da luz no ar, dado por  $\Delta y = y_P - y_Q$ , deve ser igual ao deslocamento horizontal adicional  $\Delta x$ . Portanto, obtemos  $\Delta x = y_P - y_Q \approx 16,5 \text{ cm}$ .

Finalmente, note que  $\Delta x$  também deve corresponder, em módulo, ao deslocamento da fonte para esquerda. Portanto, o aparato deve ser deslocado para a coordenada  $x_F = -\Delta x = -16,5 \text{ cm}$

**RESPOSTA: O aparato deve ser deslocado para a coordenada horizontal  $x_F = -16,5 \text{ cm}$ .**

■

10. Em um laboratório de Física, é usado um sistema massa-mola para determinar a velocidade com que um projétil é disparado. O sistema é constituído por um bloco de massa  $M = 5,00 \text{ kg}$  que está apoiado em uma superfície horizontal de atrito desprezível e está preso a uma parede rígida vertical através de uma mola de constante elástica  $k = 4500 \text{ N/m}$ . Para fazer a medida da velocidade  $v_0$  de um projétil de massa  $m = 10,0 \text{ g}$ , o mesmo é disparado contra o bloco, que está inicialmente em repouso, nas condições mostradas na figura. A parte do bloco que recebe o impacto é feita de um material deformável que aloja o projétil em seu interior. Considere que a mola se deforma apenas depois do projétil se alojar completamente no bloco (colisão projétil-bloco instantânea). Determine a velocidade  $v_0$  do projétil, em m/s, no caso em que a medida da amplitude de oscilação do bloco após o impacto é de  $2,50 \text{ cm}$ .



### Resolução

Vamos considerar o sistema formado pelo projétil e o bloco. Como o enunciado nos informa que a colisão é instantânea, podemos assumir que a mola não exerce força sobre o sistema durante a colisão. Com isso, não há força externa resultante sobre o sistema e o momento linear total  $\vec{P}$  (quantidade de movimento total) deve ser conservado.

Utilizando esta lei de conservação e adotando um sistema de coordenadas com eixo horizontal apontando para a direita, podemos determinar a velocidade escalar  $v$  do sistema após a colisão:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{antes}} &= P_{\text{depois}} \\
 mv_0 &= (m + M)v \\
 v &= \frac{m}{m + M} v_0
 \end{aligned} \tag{67}$$

onde exploramos o fato que, após a colisão, a bala se aloja no bloco e podemos tratar os dois corpos como um só de massa  $m + M$  e velocidade escalar  $v$ .

Após a colisão, o sistema passa a sofrer a ação da força elástica exercida pela mola. Como esta força é de origem conservativa, a energia mecânica  $E$  do sistema deve se conservar durante a deformação da

mola. Imediatamente após a colisão, a mola ainda se encontra na sua posição relaxada, logo a energia mecânica nesse momento é puramente cinética:

$$E = \frac{(m + M)v^2}{2} = \frac{m^2v_0^2}{2(m + M)} \quad (68)$$

onde utilizamos a Eq. 67 para substituir o valor de  $v$ .

Por outro lado, quando o sistema produz a deformação máxima na mola, sua velocidade é nula e a energia é puramente potencial:

$$E = \frac{kA^2}{2} \quad (69)$$

onde  $A$  é a amplitude informada no enunciado.

Aplicando a lei de conservação de energia, obtemos:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{m^2v_0^2}{2(m + M)} \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{(m + M)kA}}{m} \quad (70)$$

Substituindo os valores informados no enunciado e convertendo  $A$  para metros e  $m$  para quilos, encontramos:

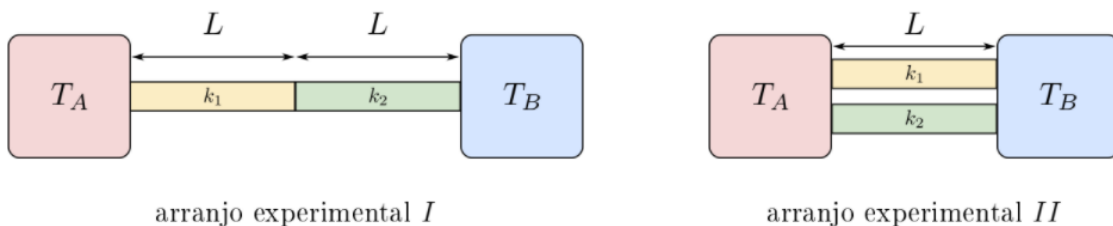
$$v_0 = \frac{\sqrt{(5,00 + 0,0100) \text{ kg} \times 4500 \text{ N/m} \times 0,0250 \text{ m}}}{0,0100 \text{ kg}} = 375 \text{ m/s} \quad (71)$$

**RESPOSTA: A velocidade inicial do projeto vale  $v_0 = 375 \text{ m/s}$ .**

■

11. As figuras abaixo ilustram dois arranjos experimentais usados para investigar a taxa de transferência de calor entre os corpos  $A$  e  $B$ . As temperaturas  $T_A$  e  $T_B$ , com  $T_A > T_B$ , são mantidas constantes por equipamentos não representados na figura. Em ambos os arranjos, são usadas duas barras cilíndricas de dimensões idênticas. A barra 1 tem condutividade térmica  $k_1$  e a barra 2 tem condutividade térmica  $k_2$ . Ambas as barras são isoladas termicamente em suas superfícies laterais de modo que o calor é conduzido de  $A$  a  $B$  sem perdas para a vizinhança. Suponha que, no regime estacionário, a taxa de transferência de calor de  $A$  para  $B$ , nos arranjos I e II sejam, respectivamente  $\phi_I$  e  $\phi_{II}$ . Determine a razão  $\phi_{II}/\phi_I$  nos seguintes casos:

- (a) as barras têm as mesmas condutividades térmicas  $k_1 = k_2$ ;  
 (b) a condutividade térmica de uma barra é o triplo da outra  $k_1 = 3k_2$ .



### Resolução

(a) No regime estacionário, a temperatura em cada ponto das barras não dependerá do tempo. Não há acúmulo de calor e portanto o fluxo de calor através de uma seção transversal qualquer de uma barra deve ser o mesmo.

Relembremos a lei da condutividade térmica de Fourier para uma barra homogênea de condutividade térmica  $k$ , comprimento  $L$  e seção transversal de área  $A$  constante:

$$\phi = \frac{kA\Delta T}{L} \quad (72)$$

Nesta equação,  $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre as extremidades da barra.

Vamos analisar primeiro o arranjo I. Seja  $T$  a temperatura na junção das barras 1 e 2. O fluxo de calor através da barra 1 é dado por:

$$\phi_1 = \frac{k_1A(T_A - T)}{L} \quad (73)$$

Analogamente, o fluxo através da barra 2 é:

$$\phi_2 = \frac{k_2A(T - T_B)}{L} \quad (74)$$

Como não há perdas através das superfícies laterais das barras (isoladas termicamente), o calor só pode fluir da barra 1 para a barra 2 neste arranjo, de forma que os dois fluxos devem ser iguais. Igualando as duas equações acima, podemos obter o valor de  $T$ :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_2 \\ k_1(T_A - T) &= k_2(T - T_B) \\ T &= \frac{k_1 T_A + k_2 T_B}{k_1 + k_2}\end{aligned}\quad (75)$$

Substituindo este valor na expressão de  $\phi_1$ , encontramos:

$$\phi_I = \phi_1 = \frac{k_1 A}{L} \left( T_A - \frac{k_1 T_A + k_2 T_B}{k_1 + k_2} \right) = \frac{k_1 k_2 A (T_A - T_B)}{(k_1 + k_2) L} \quad (76)$$

Comparando este resultado com a expressão inicial da lei de Fourier, percebemos que as duas barras podem ser substituídas por uma única “barra efetiva”, de seção transversal de área  $A$ , comprimento  $L$  e condutividade  $k_{ef}$ :

$$k_{ef} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (77)$$

Note como o raciocínio é análogo ao da associação de resistores em série, discutido tradicionalmente nos cursos de eletromagnetismo (mas cuidado: a expressão é diferente por estarmos analisando condutividades aqui!).

Analisemos agora o segundo arranjo. Desta vez as barras não estão conectadas, e calor passa pelas duas independentemente. Os fluxos através de cada barra valem:

$$\phi'_1 = \frac{k_1 A (T_A - T_B)}{L}; \quad \phi'_2 = \frac{k_2 A (T_A - T_B)}{L} \quad (78)$$

O fluxo de calor total será dado pela soma desses fluxos:

$$\phi_{II} = \phi'_1 + \phi'_2 = \frac{(k_1 + k_2) A (T_A - T_B)}{L} \quad (79)$$

Comparando mais uma vez este resultado com a expressão inicial da lei de Fourier, perceba que as duas barras podem ser substituídas por uma única “barra efetiva” com a mesma geometria das barras originais e condutividade  $k_{ef} = k_1 + k_2$ . Perceba novamente a analogia com associação de resistores, nesse caso a associação em paralelo (e o mesmo cuidado na comparação das expressões).

A partir das Eqs. 76 e 79, determinamos a razão entre  $\phi_{II}$  e  $\phi_I$ :

$$\frac{\phi_{II}}{\phi_I} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2} \quad (80)$$

Para o caso particular  $k_1 = k_2$ , proposto no enunciado, encontramos:

$$\frac{\phi_{II}}{\phi_I} = \frac{(2k_2)^2}{k_2^2} = 4 \quad (81)$$

**RESPOSTA:**  $\phi_{II}/\phi_I = 4$ .

■

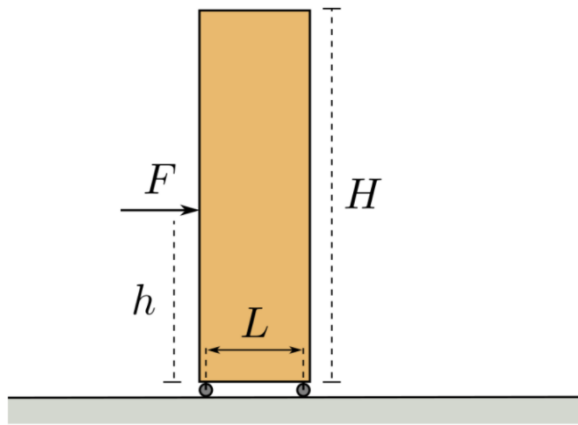
(b) Para o caso particular  $k_1 = 3k_2$ , encontramos:

$$\frac{\phi_{II}}{\phi_I} = \frac{(4k_2)^2}{3k_2^2} = \frac{16}{3} \quad (82)$$

**RESPOSTA:**  $\phi_{II}/\phi_I = 16/3$ .

■

12. Uma prateleira vazia de massa 25,0 kg, altura  $H = 1,80$  m e largura  $L = 40,0$  cm está montada sobre pequenos rodízios ideais que rolam pelo piso liso com ação desprezível de forças dissipativas. A prateleira, inicialmente em repouso, é empurrada por uma força horizontal  $\vec{F}$ , de intensidade  $F = 100$  N, aplicada a uma altura  $h$ , conforme ilustrado na figura. Considere que os rodízios têm massa e dimensões desprezíveis e que o centro de massa da prateleira está em seu centro geométrico. Determine:



- (a) a aceleração  $a$  do centro de massa da prateleira, em  $\text{m/s}^2$ ;  
 (b) a menor altura  $h_{min}$ , em m, na qual  $\vec{F}$  pode ser aplicada sem que a prateleira tombe;  
 (c) a maior altura  $h_{max}$ , em m, na qual  $\vec{F}$  pode ser aplicada sem que a prateleira tombe.

### Resolução

(a) Sabemos que o movimento do centro de massa (CM) de um corpo rígido, como é o caso da prateleira, é equivalente ao de uma partícula contendo toda a massa do corpo e sob a ação de todas as forças externas que atuam sobre o corpo. Como não há atrito, as únicas forças externas que atuam sobre a prateleira são a força peso, as normais que o piso exerce sobre os rodízios e a força  $\vec{F}$ . As forças peso e normais têm a direção vertical e se cancelam (equilíbrio nesta direção), de forma que o movimento horizontal da prateleira é promovido apenas pela força  $\vec{F}$ . Aplicando a segunda lei de Newton a essa direção, obtemos:

$$F = Ma_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{M} = \frac{100 \text{ N}}{25 \text{ Kg}} = 4 \text{ m/s}^2 \quad (83)$$

**RESPOSTA: A aceleração do CM da prateleira tem módulo  $4 \text{ m/s}^2$ , direção horizontal e aponta para a direita.**

■

(b) Para que não ocorra tombamento, a prateleira deve estar em equilíbrio de rotação com relação ao seu centro de massa. Para analisarmos as condições para que isso ocorra, devemos calcular os torques exercidos por cada força com relação ao CM.

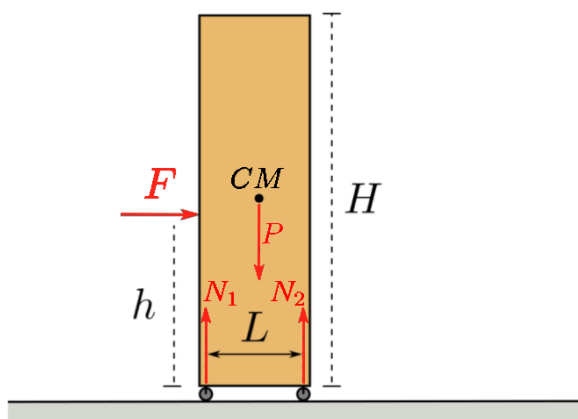
O torque de uma força genérica  $\vec{F}$  com relação a um ponto de referência é dado, em módulo, por:

$$\tau = Fd \quad (84)$$

onde  $d$  é a distância entre a linha de ação da força e o ponto de referência, conhecida como *braço de alavanca*. Além disso, consideramos como positivos torques que tendem a produzir rotações em sentido anti-horário com relação ao ponto de referência e como negativos quando tendem a produzir rotações em sentido contrário.

Para que a prateleira esteja em equilíbrio de rotação, a soma dos torques de todas as forças com relação ao seu CM deve ser nula. Note ainda que essa soma não precisa ser nula quando os torques são calculados com relação a outros pontos de referência pois, como vimos no item anterior, a prateleira tem um movimento de translação acelerado.

Vamos então prosseguir e calcular os torques com relação ao CM. Para isso, construímos o diagrama de forças da prateleira, mostrado na figura abaixo.  $\vec{P}$  é a força peso,  $\vec{N}_1$  e  $\vec{N}_2$  são as normais sobre os pares de rodilhas na traseira e na frente da prateleira, respectivamente, e a força  $\vec{F}$  também é indicada.





Como discutimos no item anterior, o equilíbrio na direção vertical nos assegura que

$$N_1 + N_2 = P \quad (85)$$

Os valores de  $N_1$  e  $N_2$  se ajustam para que a prateleira siga em seu movimento sem tombar dependendo do valor  $h$ , contudo há um limite para seus valores. Como a normal não pode ser negativa, temos a restrição  $0 \leq N_1 \leq P$ , e o mesmo ocorre para  $N_2$ . Essas restrições resultarão nos valores limite de  $h$  para o quais a prateleira não tombe.

Passemos aos torques. Como o peso atua sobre o próprio CM da prateleira, o torque desta força com relação ao CM é nulo. As demais forças exercem torques e o torque resultante tem módulo dado por:

$$\tau_{CM} = \tau_F + \tau_{N_1} + \tau_{N_2} = \left(\frac{H}{2} - h\right) F + \frac{L}{2} N_2 - \frac{L}{2} N_1 = 0 \quad (86)$$

onde levamos em conta que o CM está localizado a uma altura  $H/2$  acima do piso, supondo que a prateleira é homogênea.

Utilizando a relação  $N_2 = P - N_1$  vinda da Eq.85, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{H}{2} - h\right) F + \frac{L}{2} (P - 2N_1) &= 0 \\ h &= \frac{H}{2} + \frac{L}{2F} (P - 2N_1) \end{aligned} \quad (87)$$

A relação acima nos permite calcular  $h$  nos casos limite. O menor valor de  $h$  é dado pelo maior valor de  $N_1$  que, como discutimos acima, vale  $N_1^{max} = P$ . Nessa situação, teremos  $N_2 = 0$  e o par de rodilhas da frente está na iminência de perder contato com o piso, de forma que a prateleira está na iminência de tombar para trás. Portanto:

$$h_{min} = \frac{H}{2} - \frac{LP}{2F} = \frac{1,80 \text{ m}}{2} - \frac{0,400 \text{ m} \times 250 \text{ N}}{2 \times 100 \text{ N}} = 0,400 \text{ m} \quad (88)$$

onde utilizamos que  $P = Mg = 25 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 = 250 \text{ N}$  e convertemos a largura  $L$  para metros.

**RESPOSTA: A altura mínima vale  $h_{min} = 0,400 \text{ m}$ .**

■

(c) Analogamente, o maior valor de  $h$  é dado pelo menor valor de  $N_1$  que, como vimos acima, vale  $N_1^{min} = 0$ . Nessa situação, a rodinha de tras está na iminência de perder contato com o piso e a prateleira está na iminência de tombar para frente. Portanto:

$$h_{max} = \frac{H}{2} + \frac{LP}{2F} = \frac{1,80 \text{ m}}{2} + \frac{0,400 \text{ m} \times 250 \text{ N}}{2 \times 100 \text{ N}} = 1,40 \text{ m} \quad (89)$$

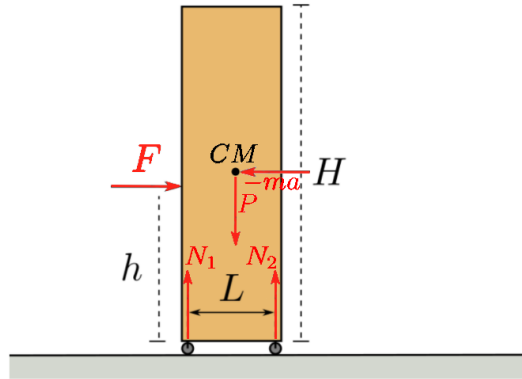
**RESPOSTA: A altura máxima vale  $h_{max} = 1,40 \text{ m}$**

■

### Observação: Referenciais não-inerciais

Como vimos acima, o CM da prateleira tem um movimento acelerado em razão da atuação da força  $\vec{F}$ . Dessa forma, um referencial atrelado ao movimento do CM da prateleira é não-inercial. Neste referencial, a prateleira deve estar em repouso a cada instante. Do ponto de vista da segunda lei de Newton, isto só poderia acontecer se pensarmos que a prateleira está sob a ação de uma força adicional fictícia  $-\vec{F}_{res} = -\vec{F}$ , conhecida como força de inércia, que tem origem não-inercial.

Ao incluirmos esta força fictícia, a força resultante sobre a prateleira se torna nula. Com isso, o torque independe do ponto de referência e, na situação de equilíbrio de rotação, deve ser sempre nulo. Para que isso aconteça, a força não-inercial deve atuar sobre o CM, como indicado na figura abaixo. Isto garante que o torque dela com relação ao CM é nulo, de forma que o torque total continua nulo. Com essa construção, poderíamos resolver o problema utilizando este referencial.



Em resumo, em um referencial não-inercial as leis de Newton devem ser modificadas. Devemos incluir as forças de inércia na análise da dinâmica de translação e rotação do corpo.