Olimpíada Brasileira de Física
Prova Ensino Médio - 3º e 4º anos - Nível III
Segunda Fase - 2019

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito elaborado pela equipe do projeto de extensão *Elaboração de Material de Preparação para a Olimpíada Brasileira de Física (OBF)*, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IF-UFRJ).

Equipe

Adolpho Fonseca Lisboa Pousa   João Octavio Oliveira Cony   Lucas Bianchi Marcianesi
Maria Luisa Chaves Lino   Sidney Natzuka Junior

Revisão

Prof. Marcos G. Menezes   Prof. Rodrigo B. Capaz

---

1. Para algumas situações específicas, é necessário que equipamentos eletrônicos funcionem adequadamente mesmo quando submetidos a acelerações extremas de até $8g$, onde g é a aceleração da gravidade. Uma forma de testar esses equipamentos é através de uma plataforma oscilante. O teste é realizado fixando o equipamento à plataforma e posto a oscilar. Se a amplitude de oscilação da plataforma é ajustada para 2,00 cm, qual deve ser o ajuste de sua frequência de oscilação para que o equipamento seja testado dentro do intervalo de acelerações requerido?

Resolução:

Primeiramente, vamos supor que o sistema executa um movimento harmônico simples (MHS). Neste caso, a relação entre a amplitude de aceleração ou aceleração máxima (a_m), frequência angular (ω) e amplitude de oscilação (A) é a seguinte:

$$a_m = \omega^2 A \tag{1}$$

(Esta relação pode ser facilmente obtida se lembrarmos que, em um sistema massa-mola, a aceleração máxima ocorre quando a força é máxima, ou seja, na situação em que, pela Lei de Kooke, $|F| = kA = ma_m$, e lembrando também que $\omega = \sqrt{k/m}$.)

É importante salientar que estamos tratando da "amplitude de aceleração", uma vez que a própria aceleração é uma função do tempo. Vamos utilizar também a seguinte relação entre a frequência angular (ω) e a frequência (f):

$$\omega = 2\pi f \tag{2}$$

Substituindo ω na primeira equação, obtemos:

$$\begin{aligned} a_m &= (2\pi f)^2 A \\ &= 4\pi^2 f^2 A \end{aligned} \tag{3}$$

de forma que:

$$f^2 = \frac{a_m}{4\pi^2 A} \tag{4}$$

Para que o equipamento seja testando dentro do limite requerido, a amplitude de aceleração deve corresponder à aceleração máximo informada pelo problema, ou seja, $a_m = 8g$. Portanto, a frequência associada será:

$$f = \sqrt{\frac{8g}{4\pi^2 A}} \tag{5}$$

Substituindo os valores do enunciado, fazendo as conversões de unidades apropriadas para o SI e admitindo $g = 10$ m/s e $\pi = 3$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
f &= \sqrt{\frac{8 \times 10 \text{ m/s}^2}{4 \times 3^2 \times 0{,}02 \text{ m}}} \\
f &= \sqrt{\frac{1000}{9}} \text{s}^{-1} \\
f &= \frac{10}{3}\sqrt{10} \text{ Hz} \\
f &\approx 10{,}5 \text{ Hz}
\end{aligned} \tag{6}
$$

A frequência de oscilação deve ser ajustada para aproximadamente 10,5 Hz.

OBS: Como informação adicional, informamos abaixo as funções horárias da posição ($x(t)$), velocidade ($v(t)$) e aceleração ($a(t)$) no movimento harmônico simples (MHS):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Acos(\omega t + \phi) \\
v(t) &= -\omega Acos(\omega t + \phi) \\
a(t) &= -\omega^2 Acos(\omega t + \phi)
\end{aligned} \tag{7}
$$

A amplitude A e a fase ϕ podem ser obtidas a partir das condições iniciais do problema, ou seja, os valores de $x(0)$ e $v(0)$. Tais equações podem ser obtidas a partir da solução da equação de movimento dada pela segunda lei de Newton, como demonstrado em cursos de nível universitário.

■

2. Um avião ultraleve tem uma massa total (com o piloto) de 500 kg e uma velocidade de estol, velocidade mínima do avião para se sustentar no ar, igual a $V = 24{,}0$ m/s. Considere que, sob as superfícies inferiores de suas asas, o ar escoa com velocidade 25% menor que V e, sobre as superfícies superiores das asas, o ar escoa com uma velocidade 25% maior que V. Estime a área total das asas do avião, sabendo que a densidade do ar é 1,20 kg/m^3.

Resolução:

A condição para que o avião possa se sustentar no ar é obtida quando igualamos seu peso à força de sustentação, calculada a partir da diferença de pressão ($P_{inf} - P_{sup}$) entre a parte inferior e superior das asas. Dessa forma, encontramos uma expressão para a área total A das asas:

$$
\begin{aligned}
(P_{inf} - P_{sup})A &= Mg \\
A &= \frac{Mg}{P_{inf} - P_{sup}}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Para encontrarmos a diferença entre as pressões, podemos utilizar da equação de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constante} \tag{9}$$

Observe que somente podemos considerar válido o princípio de Bernoulli a partir das suposições de que o escoamento é estacionário, que o ar é um fluido incompressível (ou seja, possui densidade constante) e que não há forças viscosas ou de atrito. A partir disso, podemos escrever:

$$P_{inf} + \frac{1}{2}\rho v_{inf}^2 + \rho g h_{inf} = P_{sup} + \frac{1}{2}\rho v_{sup}^2 + \rho g h_{sup} \tag{10}$$

Supondo ainda que a espessura das asas é desprezível, podemos aproximar $h_{sup} = h_{inf}$, de forma que:

$$P_{inf} - P_{sup} = \frac{\rho\ (v_{sup}^2 - v_{inf}^2)}{2} \tag{11}$$

A partir dos dados do problema, podemos escrever v_{sup} como $1{,}25V$ e v_{inf} como $0{,}75V$, portanto:

$$P_{inf} - P_{sup} = \frac{\rho\,[(1{,}25V)^2 - (0{,}75V)^2]}{2}$$

$$P_{inf} - P_{sup} = \frac{\rho V^2}{2} \tag{12}$$

Encontrada a diferença de pressões, podemos substituir o resultado acima na eq. 8 para obter a área total (A) das asas:

$$A = \frac{2Mg}{\rho V^2} \tag{13}$$

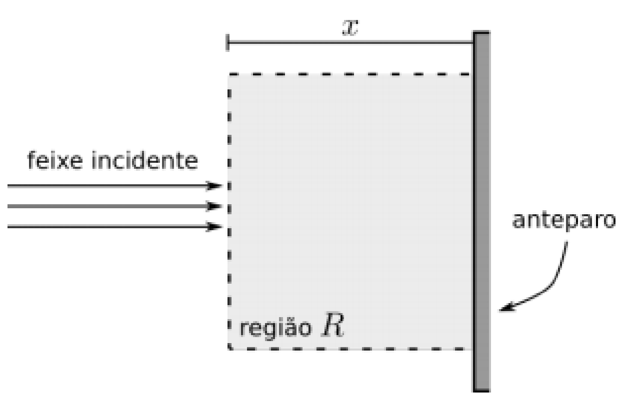
Substituindo os valores do enunciado (todos em unidades SI):

$$A = \frac{2Mg}{\rho V^2} = \frac{4500 \cdot 10}{1{,}2 \cdot 24^2}\ \mathrm{m}^2 = 14{,}5\ \mathrm{m}^2 \tag{14}$$

A área total das asas vale $14{,}5$ m^2.

■

3. Tubos de raios catódicos, semelhantes aos tubos de imagem de televisores antigos e modernos aceleradores de partículas, usam campos magnéticos para desviar feixes de íons. Considere um desses feixes em que os íons tem massa m e carga elétrica q, e que se movem com energia cinética E_c não relativística. Ao entrar em uma região R de campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ uniforme, esse feixe deve ser desviado do anteparo colocado a uma distância x do ponto de entrada em R, conforme ilustrado na figura abaixo. Considerando que a magnitude do campo magnético é ajustável, determine o menor valor de $B = |\vec{\boldsymbol{B}}|$ que faz o feixe sair de R sem colidir com o anteparo. (Em sua resolução, admita que a força gravitacional é desprezível.)



Resolução:

A força magnética $\vec{\boldsymbol{F}}_m = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ é a única força que atua sobre os íons na região R. Como a velocidade inicial é perpendicular ao campo magnético e como se trata de um campo uniforme, cria-se exatamente a condição para um movimento circular uniforme, já que a força será sempre perpendicular à velocidade.

Podemos igualar a força magnética $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ à resultante centrípeta $\vec{\boldsymbol{F}}_{cp}$. Assim, em módulo:

$$F_{cp} = F_m$$

$$\frac{mv^2}{r} = |q||\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}|$$

$$\frac{mv^2}{r} = |q|vB \tag{15}$$

onde r é o raio da trajetória e v é o módulo da velocidade do íon.

Note que, se o íon não colidir com o anteparo, ele descreverá uma trajetória semicircular na região R e retornará à região sem campo magnético. Além disso, para que não atinja o anteparo, precisamos que ele no máximo o tangencie, ou seja, o raio r da circunferência deve ser menor ou igual a x. Assim:

$$r = \frac{mv}{|q|B} \leq x \qquad \Rightarrow \qquad B \geq \frac{mv}{|q|x} \tag{16}$$

A inequação acima estabelece os valores possíveis para B e a igualdade define o valor mínimo para que não haja a colisão. Entretanto, não possuímos a informação da velocidade do íon. Apesar disso, sabemos sua energia cinética E_c, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= \frac{2E_c}{m} \\ v &= \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \end{aligned} \tag{17}$$

Podemos então, por fim, substituir na inequação anterior e encontrar:

$$\boxed{B_{min} = \frac{mv}{|q|x} = \frac{\sqrt{2mE_c}}{|q|x}} \tag{18}$$

Esse é o valor limite de B para que o íon, uma vez entrado na região R, não colida com o anteparo. Em razão da inversão do sentido de movimento do íon após a deflexão pelo campo, este sistema é conhecido como "espelho magnético".

■

4. Uma bolha de ar de 10,0 cm^3 escapa de um navio naufragado a 50,0 m de profundidade, onde a temperatura é 15,0°C, e emerge até a superfície onde a temperatura é 25,0°C . Considere que o ar se comporta como um gás ideal e, à medida que se desloca, o ar da bolha se equilibra termicamente com a água ao redor. Determine o volume da bolha ao chegar à superfície.

Resolução:

Tomamos como ponto de partida a lei dos gases ideais:

$$PV = nRT. \tag{19}$$

Como no problema em questão o número de mols n de gás não muda, podemos escrever:

$$\frac{PV}{T} = \text{constante}. \tag{20}$$

Usamos os índices 1 para indicar o momento em que a bolha se desprendeu do navio e 2 para o momento em que ela escapa para a superfície. Dessa forma:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \tag{21}$$

A pressão do gás é igual à pressão que a coluna de água sobre a bolha exerce sobre a mesma. Em um fluido que não tenha variações significativas de densidade de ponto para ponto, podemos aplicar a lei de Stevin:

$$P(h) = P_0 + \rho g h, \tag{22}$$

onde P_0 é a pressão no ponto $h = 0$ (como se trata do nível do mar $P_0 = 1$ atm $= 10^5$ Pa), ρ é a densidade do fluido e h é a profundidade. Para a água, um resultado útil para ser lembrado é que, a cada 10 metros de profundidade, a pressão aumenta por 1 atm:

$$P(h + 10 \text{ m}) - P(h) = \rho g \ (10 \text{ m}) = 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}, \tag{23}$$

onde usamos o valor da densidade da água ($\rho = 10^3$ kg/m^3). Assim, uma coluna de 50 metros adiciona 5 atm de pressão sobre a bolha, de modo que:

$$P_1 = 6 \text{ atm} \tag{24}$$

Lembrando que para utilizar a equação dos gases ideais as temperaturas devem estar na escala absoluta, convertemos as unidades de °C (celsius) para K (kelvins). Reiteramos então os dados do enunciado:

$$T_1 = 288,0 \text{ K}; \qquad T_2 = 298,0 \text{ K}; \qquad V_1 = 10,0 \text{ cm}^3; \qquad P_2 = 1 \text{ atm} \tag{25}$$

Substituindo esses dados na eq. 21, obtemos:

$$\frac{6 \times 10{,}0}{288,0} = \frac{1 \times V_2}{298{,}0} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 62{,}1 \text{ cm}^3 \tag{26}$$

Portanto, o volume da bolha assim que ela emerge é de $62{,}1$ cm^3.

■

5. Um fenômeno comum em regiões muito frias é o congelamento de lagos. A água dos lagos sob o gelo permanece aproximadamente a $0{,}00\ ^0$C, pois a camada de gelo acima funciona como um isolante térmico. Porém, se a temperatura do ar é mais fria, a camada de gelo vai crescendo de cima para baixo. Considere a situação em que a temperatura ambiente é $-15{,}0\ ^0$C . Dados a condutividade térmica do gelo k $= 5{,}00 \times 10^{-3}$ cal/(s $\cdot$ cm $\cdot$ K), estime a taxa média de crescimento de gelo, em centímetros por hora, quando ela tem uma espessura de $l = 3{,}00$ cm

Resolução:

Sabemos que o módulo do fluxo de calor ϕ através de uma área A de uma camada com espessura l submetida a uma diferença de temperaturas de módulo ΔT entre os dois lados é dado por:

$$\phi = \frac{k\ A\ \Delta T}{l}, \tag{27}$$

onde k é a condutividade térmica do material que constitui a camada. Sabemos ainda que, por definição, o módulo do fluxo é o módulo da quantidade de calor ΔQ que atravessa a camada em um intervalo de tempo Δt é:

$$\phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{28}$$

Combinando as duas equações anteriores:

$$\frac{kA\Delta T}{l} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta Q = \frac{kA\Delta T\Delta t}{l} \tag{29}$$

Sabemos ainda que ao retirarmos uma quantidade ΔQ de calor da água, uma quantidade Δm de massa da água será transformada em gelo, e as duas quantidades são relacionadas pelo calor latente de fusão L. Assim:

$$\Delta Q = \Delta m\ L \tag{30}$$

Igualando as equações 29 e 30:

$$\frac{kA\Delta T\Delta t}{l} = \Delta m\ L \quad \rightarrow \quad \Delta m = \frac{kA\Delta T\Delta t}{lL} \tag{31}$$

Por sua vez, sabemos que a massa Δm é o produto entre a densidade ρ do gelo e o volume ΔV da região transformada em gelo:

$$\Delta m = \Delta V\ \rho \tag{32}$$

Como:

$$\Delta V = A\Delta l \quad \rightarrow \quad \Delta m = A\rho\Delta l, \tag{33}$$

em que Δl é a variação da espessura da camada de gelo (cuja taxa queremos obter). Assim, igualando as equações 31 e 33:

$$\begin{aligned}
\cancel{A}\rho\Delta l &= \frac{k\cancel{A}\Delta T\Delta t}{lL} \\
\Delta l &= \frac{k\Delta T\Delta t}{l\ L\ \rho} \\
\frac{\Delta l}{\Delta t} &= \frac{k\Delta T}{lL\rho}
\end{aligned} \tag{34}$$

A variação de temperatura em graus celsius ou kelvins é a mesma. Assim, podemos calcular essa variação com os valores fornecidos pelo problema em graus celsius. Note ainda que podemos desprezar a pequena diferença entre as densidades da água e do gelo. Dessa forma, utilizando os demais dados do enunciado e do cabeçalho da prova ($L = 80$ cal/g e $\rho = 1$ g/cm^3):

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{5{,}00 \cdot 10^{-3} \cdot 15}{3{,}00 \cdot 80 \cdot 1{,}00} = 3{,}125 \times 10^{-4} \text{ cm/s} \tag{35}$$

Finalmente, convertemos o resultado acima de cm/s para cm/h. Como 1 s = 1/3600 h:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = 1{,}125 \text{ cm/h} \tag{36}$$

A taxa média de crescimento quando a camada tem uma espessura de 3,00 cm vale 1,125 cm/h.

■

6. Charles Darwin ficou fascinado com as aranhas que pousavam no convés do HMS Beagles quase dois séculos atrás. Sem asas, as aranhas chegavam ao barco, a 100 km da costa da América do Sul. Como? Novas pesquisas revelam como isso acontece. As aranhas produzem fios de seda, que eletrizados estaticamente, formam "velas"que as transportam. A figura I abaixo representa, esquematicamente, uma aranha "voando"graças à ação do vento. (Trecho adaptado da revista *National Geographic* - edição de maio de 2019.)

A repulsão eletrostática entre os fios é a responsável pelo ângulo de abertura da "vela"de uma aranha voadora. Considere um modelo bastante simplificado para descrever essa abertura no qual a carga q e massa m de um fio de teia de aranha, ao invés de estarem distribuídas ao longo de seu comprimento, estão concentradas em uma única partícula localizada na sua extremidade final. As extremidades iniciais dos fios estão unidas em um único ponto fixo preso no corpo da aranha. Para simplificar ainda mais, considere o caso no qual a "vela"é formada por apenas dois fios idênticos de comprimento l e não há ação de ventos. Logo, existe uma configuração na qual os fios permanecem pendurados, estáticos, sob a ação do campo gravitacional, das forças eletrostáticas e, naturalmente, das forças necessárias para manter suas extremidades iniciais fixas. A figura II abaixo representa esse modelo. Determine o valor da carga q supondo que o equilíbrio estático ocorre para $\theta = 60{,}0^0$ em uma "vela"no qual $l = 2{,}00$ cm. Tipicamente, a densidade da seda de aranha é $\rho = 0{,}200$ g/cm^3 e um fio de teia tem diâmetro de $D = 2{,}00$ μm.

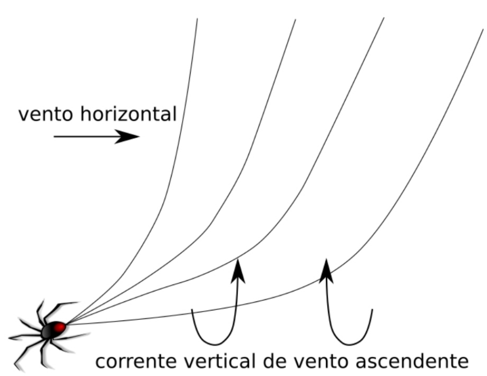


figura I

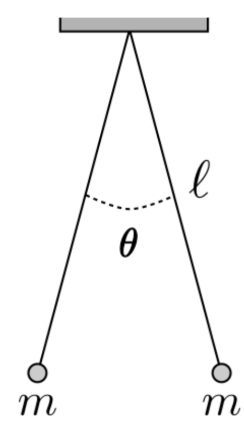
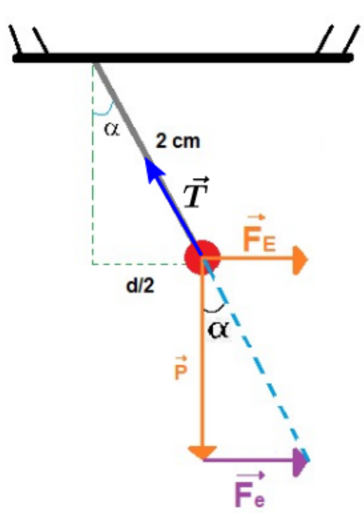


figura II

Resolução:

Vamos isolar as forças que atuam sobre a partícula de massa m na extremidade do fio da direita. O diagrama é mostrado na figura abaixo:



A tensão no fio, a força peso sobre m e a força elétrica entre as duas partículas são representadas por $\vec{\boldsymbol{T}}$, $\vec{\boldsymbol{P}}$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_E$, respectivamente. Note ainda que, na figura, $\alpha = \theta/2$ e d é a distância entre as duas partículas.

Como essa partícula está em equilíbrio estático, o somatório das forças que atuam sobre ela deve ser nulo. Decompondo a tensão $\vec{\boldsymbol{T}}$ em suas componentes T_x (horizontal) e T_y (vertical), obtemos:

$$T_x = F_e \qquad \text{e} \qquad T_y = P \tag{37}$$

Como $T_x = T\text{sen}\alpha$ e $T_y = T\cos\alpha$, obtemos:

$$T\text{sen}\alpha = F_e \qquad \text{e} \qquad T\cos\alpha = P \tag{38}$$

Dividindo a equação da esquerda pela equação da direita, eliminamos T e obtemos:

$$\tan\alpha = \frac{F_e}{P} \tag{39}$$

Pela lei de Coulomb, a força elétrica entre as duas partículas tem módulo dado pela expressão:

$$F_e = \frac{k_0 q^2}{d^2}, \tag{40}$$

onde $k_0 = 9 \times 10^9$ N.m^2/C^2 é a constante eletrostática e utilizamos o fato de que as duas cargas são idênticas. Observando a figura, podemos expressar a distância d entre as partículas em termos do comprimento l do fio:

$$\text{sen }\alpha = \frac{d/2}{l} \qquad \Rightarrow \qquad d = 2l \text{ sen }\alpha = 2 \text{ cm} \tag{41}$$

Substituindo a equação 40 na equação 39, obtemos:

$$\tan\alpha = \frac{k_0\ q^2}{mg\ d^2} \qquad \Rightarrow \qquad q = \sqrt{\frac{mg\ d^2\ \tan\alpha}{k_0}} \tag{42}$$

A partir da definição de densidade, seguindo a modelagem proposta para o problema, podemos calcular a massa total do fio como:

$$m = \rho\ V, \tag{43}$$

onde V é o volume do fio. Nesse caso, como o fio é cilíndrico:

$$V = A\ l = \pi\frac{D^2}{4}\ l \tag{44}$$

Então:

$$m = \rho\ \frac{\pi D^2}{4}\ l \tag{45}$$

Substituindo a equação acima na equação 42, encontramos:

$$q = \sqrt{\frac{\rho\ \pi D^2\ l\ g\ d^2\ \tan\alpha}{4\ k_0}} \tag{46}$$

Substituindo os valores do enunciado, o valor de d calculado acima e fazendo as conversões de unidades para o SI, obtemos, finalmente:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{(0{,}2 \times 10^3) \cdot 3 \cdot (2 \times 10^{-6})^2 \cdot (2 \times 10^{-2}) \cdot 10 \cdot (2 \times 10^{-2})^2 \cdot (\sqrt{3}/3)}{4 \cdot 9 \times 10^9}} \\ &\approx 1{,}7 \times 10^{-12} \text{ C} \\ &= 1{,}7 \text{ pC} \end{aligned} \tag{47}$$

A carga q vale aproximadamente 1,7 pC.

■

7. Pequenas bolinhas de vidro maciço, de índice de refração $\eta_\nu = 1{,}30$, são brinquedos tradicionais em muitas regiões do Brasil. Dependendo da região em que se vive, são conhecidas como bolas de gude, bolitas, balebas, etc. Considere uma bolinha de vidro transparente de 20,0 mm de diâmetro na qual, durante sua fabricação, ficaram aprisionadas duas minúsculas bolhas de ar. Uma bolha (bolha A) ficou exatamente no centro da bolinha e a outra (bolha B) a 5,00 mm de sua superfície. Considere que uma pessoa aproxima a bolinha de vidro de seu olho, direcionando sua visão para a bolha de ar, com a bolha B mais próxima de si. A que distância, ao longo da linha de visada e em relação à superfície da bolinha, ela vê as imagens (a) da bolha A e (b) da bolha B?

Resolução:

Essa questão trata de um dioptro esférico, ou seja, um sistema onde a luz é refratada pela superfície esférica da bolinha. Nessa situação, sabemos que as posições p do objeto e p' da imagem medidas com relação à superfície (ao longo da linha de visada) estão relacionadas pela equação:

$$\frac{\eta_1}{p} + \frac{\eta_2}{p'} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{R}, \tag{48}$$

onde η_1 e η_2 são os índices de refração do meio onde se encontra o objeto e a imagem (quando real), respectivamente, e R é o raio da bolinha.

Como as bolhas se encontram dentro da bolinha, vemos que $\eta_1 = \eta_v = 1{,}3$ e $\eta_2 = \eta_{ar} \approx 1{,}0$. Além disso, devemos tomar $R = -10{,}0$ mm, uma vez que a superfície da bolinha é côncava quando vista a partir do objeto (o objeto está dentro da bolinha nos dois casos abaixo).

(a) Nesse caso, a bolha A está sobre o centro da bolinha e se encontra a uma distância $p = 10{,}0$ mm da superfície. Assim:

$$\frac{1{,}3}{10{,}0} + \frac{1{,}0}{p'} = \frac{(1{,}0 - 1{,}3)}{-10{,}0} \tag{49}$$

e:

$$p' = -10{,}0 \text{ mm} \tag{50}$$

O sinal negativo mostra que a imagem formada é virtual, isto é, ela é formada dentro da bolinha. Mais ainda, note que ela é formada sobre o centro da bolinha e portanto coincide com a posição da bolha. Esse resultado era esperado, uma vez que todos os raios de luz emitidos pela bolha incidem de forma normal à superfície da esfera, ao longo da direção radial. Assim, esses raios não são defletidos pela superfície, de forma que a imagem deve se formar na mesma posição do objeto.

A imagem é formada dentro da bolinha, a uma distância de 10,0 mm da superfície.

■

(b) Nesse caso, a bolha B está a uma distância $p = 5{,}0$ mm da superfície da bolinha, ao longo da linha de visada da pessoa. Assim:

$$\frac{1{,}3}{5{,}0} + \frac{1}{p'} = \frac{(1{,}0 - 1{,}3)}{-10{,}0} \tag{51}$$

e:

$$p' = -4,35 \text{ mm} \tag{52}$$

Mais uma vez, o sinal negativo mostra que a imagem é virtual, sendo formada dentro da bolinha.

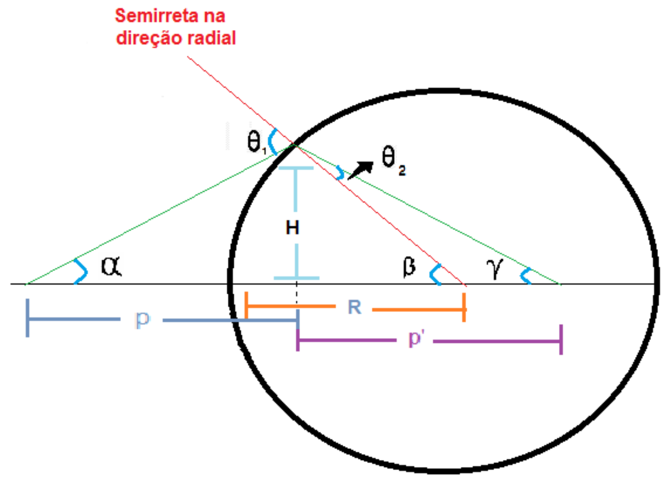
A imagem é formada dentro da bolinha, a uma distância de 4,35 mm da superfície.

■

Demonstração:

Vamos deduzir a equação 48 utilizada acima. Para facilitar, vamos supor que o objeto se encontra fora da bolinha, ao contrário das situações acima. Como discutimos acima, basta considerar um raio de curvatura negativo quando o objeto está do lado de dentro.

Considere um objeto puntiforme (como as bolhas acima) localizado sobre o eixo horizontal, como mostra a figura abaixo. A linha verde mostra o caminho de um raio de luz emitido por ele após ser refratado pela superfície. Note que um outro raio emitido ao longo do eixo não sofreria qualquer deflexão, de forma que a imagem deve se formar no próprio eixo, na posição indicada. Note ainda que as posições p e p' estão indicadas com relação à projeção do ponto de incidência do raio sobre o eixo horizontal.



Como a bolinha estará próxima ao olho da pessoa, sabemos que os ângulos mostrados na figura serão pequenos. Nessa situação, podemos utilizar as aproximações:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{H}{p}$$

$$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{H}{p'}$$

$$\beta \approx \tan\beta \approx \text{sen}\ \beta = \frac{H}{R} \tag{53}$$

Sabemos também, pela figura, que:

$$\theta_1 = \alpha + \beta$$

$$\theta_2 = \beta - \gamma \tag{54}$$

Pela lei de Snell-Descartes da refração, temos:

$$\eta_1\ \sin\theta_1 = \eta_2\ \sin\theta_2 \tag{55}$$

Para ângulos pequenos, podemos aproximá-la para:

$$\eta_1\ \theta_1 = \eta_2\ \theta_2 \tag{56}$$

Substituindo as eqs. 54 na eq. acima:

$$\eta_1\ (\alpha + \beta) = \eta_2(\beta - \gamma) \tag{57}$$

Substituindo agora as eqs. 53, obtemos:

$$\eta_1 \left(\frac{H}{p} + \frac{H}{R}\right) = \eta_2 \left(\frac{H}{R} - \frac{H}{p'}\right) \tag{58}$$

Finalmente, eliminando H e simplificando, obtemos o resultado desejado:

$$\frac{\eta_1}{p} + \frac{\eta_2}{p'} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{R} \tag{59}$$

Note ainda que, para ângulos pequenos, podemos medir p e p' com relação a superfície da bolinha, ao longo do eixo horizontal.

■

8. Uma estrela de nêutrons é composta essencialmente por nêutrons que estão ligados por meio de atração gravitacional mútua. Tais estrelas possuem uma densidade ρ comparável à de um núcleo atômico, que é de aproximadamente 10^{14} g/cm^3, e algumas possuem uma frequência de rotação $f_0 = 500$ Hz. Considerando que uma estrela de nêutrons seja uma esfera homogênea, e que a lei da gravitação universal de Newton possa ser aplicada em uma primeira aproximação:

(a) Determine a frequência máxima f_M com a qual essa estrela pode girar, sem que sua massa se desprenda do equador.

(b) Qual a diferença relativa entre o valor modelado e o valor observado $(f_M - f_0)/f_0$? Assuma o valor da constante de gravitação universal como sendo $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^3/(s^2 $\times$ kg).

Resolução:

(a) Vamos analisar as forças que atuam sobre um pequeno fragmento da estrela, de massa m, girando em seu equador. Na situação limite para o escape, a única força sobre este fragmento de massa m é a força gravitacional F_G exercida pelo resto da estrela sobre ela (pois quaisquer forças de contato serão nulas). Em outras palavras, se a estrela girar com uma velocidade maior que a limite, a força gravitacional não será suficiente para manter esta massa m ligada à estrela, e ela escapará. Portanto, nesta condição limite, a força gravitacional deve ser igual à resultante centrípeta F_C:

$$F_G = F_C. \tag{60}$$

Sabemos que a força gravitacional é dada pela expressão:

$$F_G = \frac{G\ M\ m}{R^2}, \tag{61}$$

onde M é a massa do restante da estrela (praticamente igual à toda a massa da estrela) e R é o raio da mesma. Além disso, a resultante centrípeta é dada pela expressão:

$$F_C = \frac{m\ v_M^2}{R} = m\ R\ \omega_M^2, \tag{62}$$

onde v_M é a velocidade escalar de m e $\omega_M = v_M/R$ é a velocidade angular. Substituindo as equações 61 e 62 na equação 60, encontramos:

$$\frac{G\ M\ m}{R^2} = m\ R\ \omega_M^2 \tag{63}$$

Isolando ω_M:

$$\omega_M^2 = \frac{G\ M\ m}{R^2\ R\ m} \Rightarrow \omega_M = \sqrt{\frac{G\ M}{R^3}} \tag{64}$$

A frequência f_M pode ser obtida a partir da relação $\omega_M = 2\pi f_M$, de modo que:

$$f_M = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G\ M}{R^3}} = \sqrt{\frac{G\ M}{R^3\ 4\pi^2}} \tag{65}$$

Podemos calcular a massa M da estrela a partir da relação entre densidade, volume e massa de um corpo homogêneo:

$$M = \rho V, \tag{66}$$

e, como a estrela é esférica:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \Rightarrow \quad M = \rho\ \frac{4\pi R^3}{3} \tag{67}$$

Substituindo a equação 67 na equação 65:

$$f_M = \sqrt{\frac{G\rho\ \frac{4\pi R^3}{3}}{4R^3\pi^2}} = \sqrt{\frac{G\ \rho}{3\pi}} \tag{68}$$

Substituindo os valores informados no enunciado, encontramos:

$$f_M = \sqrt{\frac{6,7\ 10^{-11} \times 10^{17}}{3\pi}} \approx 860 \text{ Hz} \tag{69}$$

É importante salientar que as unidades foram convertidas para o sistema internacional antes de serem substituídas.

A frequência máxima com que a estrela pode girar vale 860 Hz.

■

(b) Utilizando a relação informada no enunciado e o valor de f_0, obtemos:

$$\frac{f_M - f_0}{f_0} = \frac{860 - 500}{500} = 0,72 \ \Rightarrow \quad 72\% \tag{70}$$

A diferença relativa é de 72%.

■