Gabarito elaborado pela equipe do projeto de extensão *Elaboração de Material de Preparação para a Olimpíada Brasileira de Física (OBF)*, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IF-UFRJ).

Equipe

Adolpho Fonseca Lisboa Pousa   João Octavio Oliveira Cony   Lucas Bianchi Marcianesi
Maria Luisa Chaves Lino   Sidney Natzuka Junior

Revisão

Prof. Marcos G. Menezes   Prof. Rodrigo B. Capaz

1. A resistência à tração (capacidade de resistir a forças de tração sem se romper) da seda de aranha é comparável com a do aço e vale $R_T = 2000 \times 10^6$ N/m^2. Considerando que um fio de aranha tem o formato cilíndrico, estime seu comprimento máximo impondo a condição que deve ser capaz de sustentar o próprio peso quando pendurado verticalmente. Sabe-se que a densidade da seda de aranha é $\rho = 0{,}200$ g/cm^3. (Em sua resolução, suponha que a seda de aranha é inextensível.)

Resolução

Repare que, como se trata de um fio com massa não-desprezível, a tração irá variar ao longo do seu comprimento, mas a tração máxima irá ocorrer no ponto em que o fio está preso, ou seja, este é o ponto provável de ruptura, onde devemos focalizar nossa análise. Neste sentido, o fio deve sustentar o próprio peso. Assim, o diagrama de forças apropriado será:

Como o sistema está em equilíbrio, $\vec{T}$ e $\vec{P}$ possuem módulos iguais:

$$T = P = mg \tag{1}$$

A resistência à tração é medida em N/m^2, sendo N unidade de força e m^2 unidade de área. Vemos portanto que ela tem unidades de pressão. Como o fio deve ser capaz de sustentar o seu próprio peso, a situação limite deve ocorrer quando a tensão T por unidade de área da seção transversal do fio for igual à resistência R_t:

$$R_t = \frac{T}{A} = \frac{P}{A} = \frac{mg}{A}, \tag{2}$$

onde A é a área da seção transversal.

Podemos achar a massa m do fio através da fórmula da densidade, observando que o volume total do fio corresponde ao produto da área A pelo comprimento L do fio:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A\ L} \tag{3}$$

de forma que:

$$m = \rho A L \tag{4}$$

Substituindo a equação 4 na equação 2, obtemos:

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{mg}{A} \\ &= \frac{\rho A L g}{A} \\ &= \rho L g \end{aligned} \tag{5}$$

Portanto:

$$L = \frac{R_T}{\rho g} \tag{6}$$

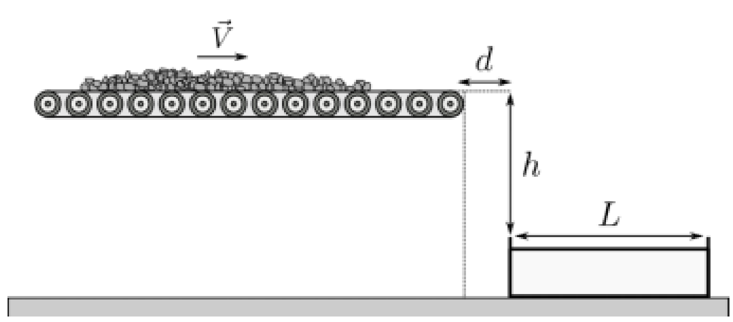
Substituindo os valores informados no enunciado e atentando-se às devidas conversões de unidades para o SI ($1\ \mathrm{g/cm^3} = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$), obtemos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2000 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2}}{0{,}200 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times 10{,}0\ \mathrm{m/s^2}} \\ L &= 10^6\ \mathrm{m} \end{aligned} \tag{7}$$

Portanto, o fio deve ter um comprimento máximo de 10^6 m ou 1.000 km, o que sugere que a teia de aranha é feita de uma material extremamente resistente!

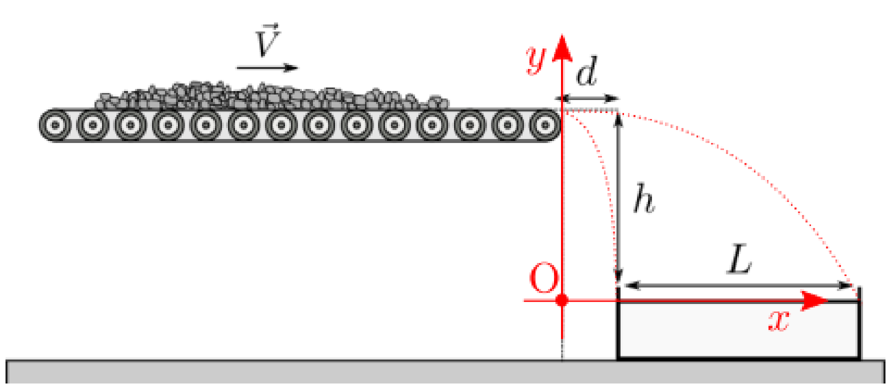
■

2. Uma esteira transporta cascalho até uma caçamba de comprimento $L = 2{,}00$ m localizada à sua frente. A figura abaixo, na qual $d = 1{,}50$ m e $h = 2{,}50$ m, representa esquematicamente a situação de seu funcionamento. Suponha que a esteira se mova com velocidade constante e que o cascalho não rola nem escorrega sobre ela. Desconsiderando as dimensões do cascalho e o efeito resistivo do ar, determine o intervalo de velocidades no qual a esteira pode operar sem que o cascalho caia fora da caçamba.



Resolução:

Trata-se de um lançamento horizontal, ou seja, um movimento bidimensional cuja única força atuante ao longo do movimento do cascalho é a força peso. Vamos adotar um referencial com origem no ponto O indicado na figura, eixo x apontando para a direita e eixo y apontando para cima. Podemos modelar o movimento com duas funções posição que dependem do tempo, $x(t)$ e $y(t)$.



A componente horizontal do movimento, $x(t)$, deve descrever um movimento retilíneo uniforme (MRU), uma vez que a força peso, única força atuante durante o movimento, não tem componente horizontal. A velocidade desse movimento é justamente a velocidade $\vec{V}$ inicial, que não tem componente vertical. Assim:

$$x(t) = Vt \tag{8}$$

A componente vertical desse movimento, $y(t)$ consiste de uma queda livre. De acordo com o referencial adotado, a altura inicial é h, a velocidade inicial é nula (a velocidade inicial $\vec{V}$ não possui componente vertical) e a aceleração tem módulo g e aponta para baixo. Assim:

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2} \tag{9}$$

Para calcular o intervalo de velocidades em que o cascalho cai dentro da caçamba, eliminamos o tempo t do sistema de equações para obtermos a equação da trajetória $y(x)$:

$$y(x) = h - \frac{gx^2}{2V^2}. \tag{10}$$

Estamos interessados nas situações em que $y = 0$ e $x = d$ ou $x = d + L$, que vão determinar se o cascalho cai dentro ou fora da caçamba, de modo que podemos obter a velocidade mínima (para o caso $x = d$):

$$V_{min} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = (1{,}5 \text{ m}) \times (1{,}4 \text{ s}) = 2{,}1 \text{ m/s} \tag{11}$$

E, de forma semelhante, a velocidade máxima V_{max} (para o caso $x = d + L$):

$$V_{max} = (d + L)\sqrt{\frac{g}{2h}} = (3{,}5 \text{ m}) \times (1{,}4 \text{ s}) = 4{,}9 \text{ m/s} \tag{12}$$

Portanto, o intervalo de velocidades possíveis é:

$$2{,}1 \ \mathbf{m/s} \leq V \leq 4{,}9 \ \mathbf{m/s}$$

■

3. Para algumas situações específicas, é necessário que equipamentos eletrônicos funcionem adequadamente mesmo quando submetidos a acelerações extremas de até $8g$, onde g é a aceleração da gravidade. Uma forma de testar esses equipamentos é através de uma plataforma oscilante. O teste é realizado fixando o equipamento à plataforma e posto a oscilar. Se a amplitude de oscilação da plataforma é ajustada para 2,00 cm, qual deve ser o ajuste de sua frequência de oscilação para que o equipamento seja testado dentro do intervalo de acelerações requerido?

Resolução:

Primeiramente, vamos supor que o sistema executa um movimento harmônico simples (MHS). Neste caso, a relação entre a amplitude de aceleração ou aceleração máxima (a_m), frequência angular (ω) e amplitude de oscilação (A) é a seguinte:

$$a_m = \omega^2 A \tag{13}$$

(Esta relação pode ser facilmente obtida se lembrarmos que, em um sistema massa-mola, a aceleração máxima ocorre quando a força é máxima, ou seja, na situação em que, pela Lei de Kooke, $|F| = kA = ma_m$, e lembrando também que $\omega = \sqrt{k/m}$.)

É importante salientar que estamos tratando da “amplitude de aceleração”, uma vez que a própria aceleração é uma função do tempo. Vamos utilizar também a seguinte relação entre a frequência angular (ω) e a frequência (f):

$$\omega = 2\pi f \tag{14}$$

Substituindo ω na primeira equação, obtemos:

$$a_m = (2\pi f)^2 A$$
$$= 4\pi^2 f^2 A \tag{15}$$

de forma que:

$$f^2 = \frac{a_m}{4\pi^2 A} \tag{16}$$

Para que o equipamento seja testando dentro do limite requerido, a amplitude de aceleração deve corresponder à aceleração máximo informada pelo problema, ou seja, $a_m = 8g$. Portanto, a frequência associada será:

$$f = \sqrt{\frac{8g}{4\pi^2 A}} \tag{17}$$

Substituindo os valores do enunciado, fazendo as conversões de unidades apropriadas para o SI e admitindo $g = 10$ m/s e $\pi = 3$, obtemos:

$$f = \sqrt{\frac{8 \times 10 \text{ m/s}^2}{4 \times 3^2 \times 0{,}02 \text{ m}}}$$
$$f = \sqrt{\frac{1000}{9}} \text{s}^{-1}$$
$$f = \frac{10}{3}\sqrt{10} \text{ Hz}$$
$$f \approx 10{,}5 \text{ Hz} \tag{18}$$

A frequência de oscilação deve ser ajustada para aproximadamente $10{,}5$ Hz.

OBS: Como informação adicional, informamos abaixo as funções horárias da posição ($x(t)$), velocidade ($v(t)$) e aceleração ($a(t)$) no movimento harmônico simples (MHS):

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi)$$
$$v(t) = -\omega Acos(\omega t + \phi)$$
$$a(t) = -\omega^2 Acos(\omega t + \phi) \tag{19}$$

A amplitude A e a fase ϕ podem ser obtidas a partir das condições iniciais do problema, ou seja, os valores de $x(0)$ e $v(0)$. Tais equações podem ser obtidas a partir da solução da equação de movimento dada pela segunda lei de Newton, como demonstrado em cursos de nível universitário.

■

4. Um avião ultraleve tem uma massa total (com o piloto) de 500 kg e uma velocidade de estol, velocidade mínima do avião para se sustentar no ar, igual a $V = 24{,}0$ m/s. Considere que, sob as superfícies inferiores de suas asas, o ar escoa com velocidade 25% menor que V e, sobre as superfícies superiores das asas, o ar escoa com uma velocidade 25% maior que V. Estime a área total das asas do avião, sabendo que a densidade do ar é 1,20 kg/m^3.

Resolução:

A condição para que o avião possa se sustentar no ar é obtida quando igualamos seu peso à força de sustentação, calculada a partir da diferença de pressão ($P_{inf} - P_{sup}$) entre a parte inferior e superior das asas. Dessa forma, encontramos uma expressão para a área total A das asas:

$$(P_{inf} - P_{sup})A = Mg$$
$$A = \frac{Mg}{P_{inf} - P_{sup}} \tag{20}$$

Para encontrarmos a diferença entre as pressões, podemos utilizar da equação de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constante} \tag{21}$$

Observe que somente podemos considerar válido o princípio de Bernoulli a partir das suposições de que o escoamento é estacionário, que o ar é um fluido incompressível (ou seja, possui densidade constante) e que não há forças viscosas ou de atrito. A partir disso, podemos escrever:

$$P_{inf} + \frac{1}{2}\rho v_{inf}^2 + \rho g h_{inf} = P_{sup} + \frac{1}{2}\rho v_{sup}^2 + \rho g h_{sup} \tag{22}$$

Supondo ainda que a espessura das asas é desprezível, podemos aproximar $h_{sup} = h_{inf}$, de forma que:

$$P_{inf} - P_{sup} = \frac{\rho\ (v_{sup}^2 - v_{inf}^2)}{2} \tag{23}$$

A partir dos dados do problema, podemos escrever v_{sup} como $1{,}25V$ e v_{inf} como $0{,}75V$, portanto:

$$P_{inf} - P_{sup} = \frac{\rho\ [(1{,}25V)^2 - (0{,}75V)^2]}{2}$$

$$P_{inf} - P_{sup} = \frac{\rho V^2}{2} \tag{24}$$

Encontrada a diferença de pressões, podemos substituir o resultado acima na eq. 20 para obter a área total (A) das asas:

$$A = \frac{2Mg}{\rho V^2} \tag{25}$$

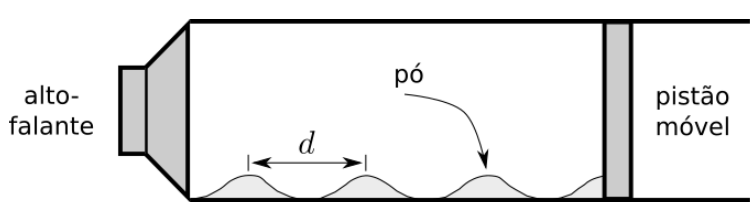
Substituindo os valores do enunciado (todos em unidades SI):

$$A = \frac{2Mg}{\rho V^2} = \frac{4500 \cdot 10}{1{,}2 \cdot 24^2}\ \text{m}^2 = 14{,}5\ \text{m}^2 \tag{26}$$

A área total das asas vale $14{,}5$ m^2.

■

5. A figura abaixo mostra um tubo utilizado para medir a velocidade do som em gases. O interior do tubo é preenchido com gás hidrogênio a temperatura de 25 ^{o}C e um pó muito fino e pouco denso. A extremidade direita do tubo possui um pistão móvel, e a extremidade esquerda possui um alto-falante que emite na frequência de 1000 Hz. Ajustando o comprimento do tubo por meio do pistão móvel até que ele entre em ressonância com a frequência do altofalante, observa-se a formação de pequenos montes de pó, sendo que o espaçamento médio entre os picos desses montes é d = 63,5 cm. Nessas condições, qual é a velocidade do som no gás hidrogênio?



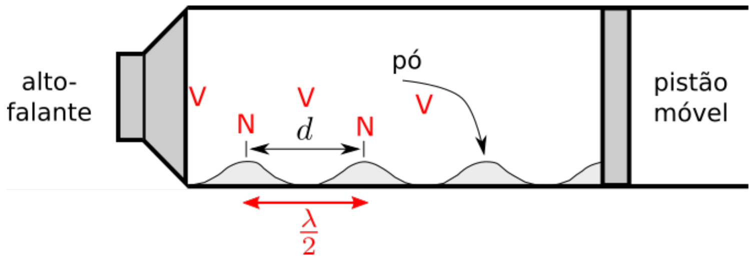
Resolução

Para calcular a velocidade de propagação do som nesse gás, basta usar a equação fundamental da ondulatória:

$$v = \lambda f, \tag{27}$$

onde f é a frequência da onda, v é a velocidade de propagação da onda sonora no hidrogênio, e λ é o comprimento de onda.

Como o sistema está em ressonância, uma onda estácionária é produzida no interior do tubo. Os montes de poeira se formam nos pontos chamados de **nós de deslocamento**. Estes são os pontos onde as



particulas do gás não se movem, pois as ondas incidente e refletida que geram a onda estácionária se cancelam completamente através de uma interferência destrutiva. Os nós (N) e ventres (V) de deslocamento são representados na figura a seguir:

Vamos utilizar o fato de que, em uma onda estácionaria, **a distância d entre dois ventres ou dois nós corresponde à metade do comprimento de onda**. Assim:

$$d = \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = 2d \tag{28}$$

Substituindo esse resultado na Eq. 27 e substituindo os valores informados pelo problema, obtemos:

$$v = 2df = 2 \cdot (63{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \cdot (1000 \text{ Hz})$$
$$v = 1270 \text{ m/s} \tag{29}$$

A velocidade de propagação do som no gás hidrogênio vale 1270 m/s.

■

6. Uma bolha de ar de 10,0 cm^3 escapa de um navio naufragado a 50,0 m de profundidade, onde a temperatura é 15,0°C, e emerge até a superfície onde a temperatura é 25,0°C . Considere que o ar se comporta como um gás ideal e, à medida que se desloca, o ar da bolha se equilibra termicamente com a água ao redor. Determine o volume da bolha ao chegar à superfície.

Resolução:

Tomamos como ponto de partida a lei dos gases ideais:

$$PV = nRT. \tag{30}$$

Como no problema em questão o número de mols n de gás não muda, podemos escrever:

$$\frac{PV}{T} = \text{constante}. \tag{31}$$

Usamos os índices 1 para indicar o momento em que a bolha se desprendeu do navio e 2 para o momento em que ela escapa para a superfície. Dessa forma:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \tag{32}$$

A pressão do gás é igual à pressão que a coluna de água sobre a bolha exerce sobre a mesma. Em um fluido que não tenha variações significativas de densidade de ponto para ponto, podemos aplicar a lei de Stevin:

$$P(h) = P_0 + \rho g h, \tag{33}$$

onde P_0 é a pressão no ponto $h = 0$ (como se trata do nível do mar $P_0 = 1$ atm $= 10^5$ Pa), ρ é a densidade do fluido e h é a profundidade. Para a água, um resultado útil para ser lembrado é que, a cada 10 metros de profundidade, a pressão aumenta por 1 atm:

$$P(h + 10 \text{ m}) - P(h) = \rho g \ (10 \text{ m}) = 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}, \tag{34}$$

onde usamos o valor da densidade da água ($\rho = 10^3$ kg/m^3). Assim, uma coluna de 50 metros adiciona 5 atm de pressão sobre a bolha, de modo que:

$$P_1 = 6 \text{ atm} \tag{35}$$

Lembrando que para utilizar a equação dos gases ideais as temperaturas devem estar na escala absoluta, convertemos as unidades de °C (celsius) para K (kelvins). Reiteramos então os dados do enunciado:

$$T_1 = 288,0 \text{ K}; \qquad T_2 = 298,0 \text{ K}; \qquad V_1 = 10,0 \text{ cm}^3; \qquad P_2 = 1 \text{ atm} \tag{36}$$

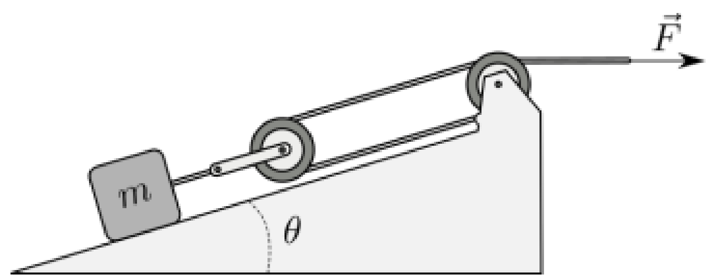
Substituindo esses dados na eq. 32, obtemos:

$$\frac{6 \times 10{,}0}{288,0} = \frac{1 \times V_2}{298{,}0} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 62{,}1 \text{ cm}^3 \tag{37}$$

Portanto, o volume da bolha assim que ela emerge é de 62,1 cm³.

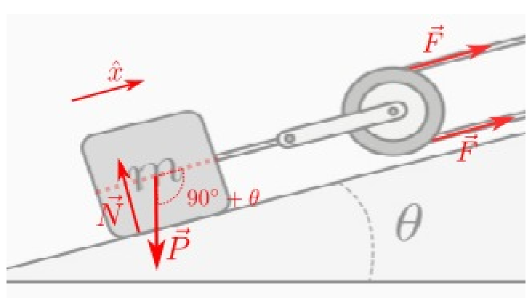
■

7. Uma carga de $m = 5{,}00$ kg pode deslizar na superfície lisa, sem atrito, de um plano inclinado de $\theta = 30{,}0°$. A carga está presa por uma corda ao centro de uma polia móvel que por sua vez se acopla a uma polia fixa através de outra corda. Essa tem uma de suas extremidades fixas, enquanto a outra é puxada por uma força horizontal constante $\vec{F}$. Veja figura abaixo. Assuma que as cordas e polias são ideais e que o sentido positivo da aceleração da caixa aponta para cima ao longo do plano inclinado. Determine a aceleração da caixa quando a intensidade da força horizontal aplicada é $F = |\vec{F}| = 10{,}0$ N.



Resolução:

Como a corda é ideal, a força de módulo F aplicada em sua extremidade é transmitida por todos os seus pontos sob a forma de uma tensão de mesmo módulo. Levando isso em conta e considerando o sistema formado pela polia móvel (ideal) e o bloco, construímos o diagrama de forças abaixo. Adotamos ainda um referencial com eixo x ao longo do plano, orientado para cima.



A força peso tem uma componente x dada por:

$$P_x = P\cos(90^o + \theta) = -mg \text{ sen}\theta \tag{38}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para o movimento ao longo deste eixo, teremos:

$$ma = 2F - mg \text{ sen}\theta \tag{39}$$

Substituindo os valores informados no enunciado, obtemos finalmente:

$$a = \frac{2 \times 10{,}0 - 5{,}00 \times 10{,}0 \times \frac{1}{2}}{5{,}00} = -1{,}0 \text{ m/s}^2 \tag{40}$$

O sinal negativo indica que a aceleração tem sentido contrário ao adotado como positivo para o referencial, de forma que ela aponta para baixo ao longo do plano.

O bloquinho tem uma aceleração de módulo 1,0 m/s² na direção do plano inclinado e sentido para baixo.

■

8. Satélites geoestacionários estão em órbitas tais que, sob o ponto de vista de um observador na Terra, permanecem fixos. Esses satélites são principalmente utilizados por redes de comunicação que atendem a uma região fixa da Terra. Ligações telefônicas e transmissões televisivas de longa distância, geralmente são feitas por esse tipo de satélite. Suponha dois satélites E e F em órbitas circulares e coplanares, com o satélite E em órbita geoestacionária e o satélite F com órbita de raio 21% maior que o satélite E.

(a) Qual o período de translação do satélite F em horas?
(b) Suponha um instante no qual os satélites E e F estão alinhados com um ponto na superfície da Terra e determine o menor intervalo de tempo, em horas, para que isso ocorra novamente.

Resolução:

(a) Para dois corpos A e B que realizam órbitas circulares ao redor de um corpo central, na qual a interação entre os corpos A e B e o corpo central seja uma força central da forma $F(r) = k/r^2$ (como a força gravitacional), é válida a terceira lei de Kepler:

$$\frac{{T_A}^2}{{R_A}^3} = \frac{{T_B}^2}{{R_B}^3}, \tag{41}$$

onde T e R representam os períodos e os raios das órbitas desses corpos, respectivamente.

Seja o corpo A o satélite E, e o corpo B o satélite F. Como o satélite E é geoestacionário:

$$T_E = 1 \text{ dia} \tag{42}$$

Pelo enunciado, como o satélite F tem uma órbita com um raio 21% maior que o da órbita do satélite E:

$$R_F = 1{,}21 R_E \tag{43}$$

Substituindo essas informações na equação (41), temos:

$$\frac{1}{{R_E}^3} = \frac{{T_F}^2}{(1,21R_E)^3} \quad \Rightarrow \quad T_F = (1,21)^{\frac{3}{2}} \text{ dias} \tag{44}$$

Lembrando que $11^2 = 121$, vemos que $1{,}1^2 = 1{,}21$. Portanto:

$$T_F = 1{,}1^3 = 1{,}33 \text{ dias} \tag{45}$$

O período do satélite F é de 1,33 dias, o que equivale a 32 horas.

■

(b) A função horária $\theta(t)$ de um movimento circular uniforme é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 \pm \frac{2\pi t}{T} \tag{46}$$

Onde o sinal positivo indica uma rotação no sentido anti-horário (trigonométrico) e o negativo no sentido horário. Como os satélites estão alinhados inicialmente, a condição inicial dos dois movimentos é igual, de forma que podemos fixar $\theta_0 = 0$ por simplicidade. Primeiramente, supõe-se que os dois satélites executem o movimento no mesmo sentido (anti-horário). Assim, substituindo os valores dos períodos em horas:

$$\begin{aligned} \theta_E(t) &= \frac{2\pi t}{24} \\ \theta_F(t) &= \frac{2\pi t}{32} \end{aligned} \tag{47}$$

Como o satélite E gira mais rápido que o F, o próximo alinhamento ocorrerá quando ele tiver dado uma volta completa a mais (2π rad) que F, ou seja:

$$\begin{aligned} \theta_E - \theta_F &= 2\pi \\ \frac{2\pi t_*}{24} - \frac{2\pi t_*}{32} &= 2\pi, \end{aligned} \tag{48}$$

onde t_* é o instante de tempo onde os satélites voltam a estar alinhados. Portanto:

$$2\pi t_* \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32}\right) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad t_* = \frac{1}{\frac{1}{24} - \frac{1}{32}} = 96 \text{ h} \tag{49}$$

Analogamente, se os satélites girarem em sentidos opostos:

$$\begin{aligned}
\theta_E(t) &= \frac{2\pi t}{24} \\
\theta_F(t) &= -\frac{2\pi t}{32} \\
2\pi &= \theta_E - \theta_F \\
2\pi &= \frac{2\pi t_*}{24} + \frac{2\pi t_*}{32} \\
t_* &= \frac{96}{7}\ \text{h} \approx 13,7\ \text{h}
\end{aligned} \tag{50}$$

Os satélites, partindo de uma condição de alinhamento, se orbitarem a Terra no mesmo sentido voltam a se alinhar em 96 h, se orbitarem em sentos opostos voltam em $13,7$ h.

■

9. Uma estrela de nêutrons é composta essencialmente por nêutrons que estão ligados por meio de atração gravitacional mútua. Tais estrelas possuem uma densidade ρ comparável à de um núcleo atômico, que é de aproximadamente 10^{14} g/cm^3, e algumas possuem uma frequência de rotação $f_0 = 500$ Hz. Considerando que uma estrela de nêutrons seja uma esfera homogênea, e que a lei da gravitação universal de Newton possa ser aplicada em uma primeira aproximação:

   (a) Determine a frequência máxima f_M com a qual essa estrela pode girar, sem que sua massa se desprenda do equador.
   (b) Qual a diferença relativa entre o valor modelado e o valor observado $(f_M - f_0)/f_0$? Assuma o valor da constante de gravitação universal como sendo $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^3/(s^2 × kg).

Resolução:

(a) Vamos analisar as forças que atuam sobre um pequeno fragmento da estrela, de massa m, girando em seu equador. Na situação limite para o escape, a única força sobre este fragmento de massa m é a força gravitacional F_G exercida pelo resto da estrela sobre ela (pois quaisquer forças de contato serão nulas). Em outras palavras, se a estrela girar com uma velocidade maior que a limite, a força gravitacional não será suficiente para manter esta massa m ligada à estrela, e ela escapará. Portanto, nesta condição limite, a força gravitacional deve ser igual à resultante centrípeta F_C:

$$F_G = F_C. \tag{51}$$

Sabemos que a força gravitacional é dada pela expressão:

$$F_G = \frac{G\ M\ m}{R^2}, \tag{52}$$

onde M é a massa do restante da estrela (praticamente igual à toda a massa da estrela) e R é o raio da mesma. Além disso, a resultante centrípeta é dada pela expressão:

$$F_C = \frac{m\ v_M^2}{R} = m\ R\ \omega_M^2, \tag{53}$$

onde v_M é a velocidade escalar de m e $\omega_M = v_M/R$ é a velocidade angular. Substituindo as equações 52 e 53 na equação 51, encontramos:

$$\frac{G\ M\ m}{R^2} = m\ R\ \omega_M^2 \tag{54}$$

Isolando ω_M:

$$\omega_M^2 = \frac{G\ M\ m}{R^2\ R\ m} \Rightarrow \omega_M = \sqrt{\frac{G\ M}{R^3}} \tag{55}$$

A frequência f_M pode ser obtida a partir da relação $\omega_M = 2\pi f_M$, de modo que:

$$f_M = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G\ M}{R^3}} = \sqrt{\frac{G\ M}{R^3\ 4\pi^2}} \tag{56}$$

Podemos calcular a massa M da estrela a partir da relação entre densidade, volume e massa de um corpo homogêneo:

$$M = \rho V, \tag{57}$$

e, como a estrela é esférica:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \Rightarrow \quad M = \rho\,\frac{4\pi R^3}{3} \tag{58}$$

Substituindo a equação 58 na equação 56:

$$f_M = \sqrt{\frac{G\rho\,\dfrac{4\pi R^3}{3}}{4R^3\pi^2}} = \sqrt{\frac{G\,\rho}{3\pi}} \tag{59}$$

Substituindo os valores informados no enunciado, encontramos:

$$f_M = \sqrt{\frac{6,7\ 10^{-11} \times 10^{17}}{3\pi}} \approx 860 \text{ Hz} \tag{60}$$

É importante salientar que as unidades foram convertidas para o sistema internacional antes de serem substituídas.

A frequência máxima com que a estrela pode girar vale 860 Hz.

■

(b) Utilizando a relação informada no enunciado e o valor de f_0, obtemos:

$$\frac{f_M - f_0}{f_0} = \frac{860 - 500}{500} = 0,72 \;\Rightarrow\; 72\% \tag{61}$$

A diferença relativa é de 72%.

■

10. Um fenômeno comum em regiões muito frias é o congelamento de lagos. A água dos lagos sob o gelo permanece aproximadamente a 0,00 ^{0}C, pois a camada de gelo acima funciona como um isolante térmico. Porém, se a temperatura do ar é mais fria, a camada de gelo vai crescendo de cima para baixo. Considere a situação em que a temperatura ambiente é $-15{,}0$ ^{0}C . Dados a condutividade térmica do gelo k $= 5{,}00 \times 10^{-3}$ cal/(s · cm · K), estime a taxa média de crescimento de gelo, em centímetros por hora, quando ela tem uma espessura de $l = 3{,}00$ cm

Resolução:

Sabemos que o módulo do fluxo de calor ϕ através de uma área A de uma camada com espessura l submetida a uma diferença de temperaturas de módulo ΔT entre os dois lados é dado por:

$$\phi = \frac{k\ A\ \Delta T}{l}, \tag{62}$$

onde k é a condutividade térmica do material que constitui a camada. Sabemos ainda que, por definição, o módulo do fluxo é o módulo da quantidade de calor ΔQ que atravessa a camada em um intervalo de tempo Δt é:

$$\phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{63}$$

Combinando as duas equações anteriores:

$$\frac{kA\Delta T}{l} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta Q = \frac{kA\Delta T\Delta t}{l} \tag{64}$$

Sabemos ainda que ao retirarmos uma quantidade ΔQ de calor da água, uma quantidade Δm de massa da água será transformada em gelo, e as duas quantidades são relacionadas pelo calor latente de fusão L. Assim:

$$\Delta Q = \Delta m\ L \tag{65}$$

Igualando as equações 64 e 65:

$$\frac{kA\Delta T\Delta t}{l} = \Delta m\ L \quad \rightarrow \quad \Delta m = \frac{kA\Delta T\Delta t}{lL} \tag{66}$$

Por sua vez, sabemos que a massa Δm é o produto entre a densidade ρ do gelo e o volume ΔV da região transformada em gelo:

$$\Delta m = \Delta V \ \rho \tag{67}$$

Como:

$$\Delta V = A \Delta l \quad \rightarrow \quad \Delta m = A \rho \Delta l, \tag{68}$$

em que Δl é a variação da espessura da camada de gelo (cuja taxa queremos obter). Assim, igualando as equações 66 e 68:

$$\begin{aligned} \cancel{A} \rho \Delta l &= \frac{k \cancel{A} \Delta T \Delta t}{l L} \\ \Delta l &= \frac{k \Delta T \Delta t}{l \ L \ \rho} \\ \frac{\Delta l}{\Delta t} &= \frac{k \Delta T}{l L \rho} \end{aligned} \tag{69}$$

A variação de temperatura em graus celsius ou kelvins é a mesma. Assim, podemos calcular essa variação com os valores fornecidos pelo problema em graus celsius. Note ainda que podemos desprezar a pequena diferença entre as densidades da água e do gelo. Dessa forma, utilizando os demais dados do enunciado e do cabeçalho da prova ($L = 80$ cal/g e $\rho = 1$ g/cm^3):

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{5{,}00 \cdot 10^{-3} \cdot 15}{3{,}00 \cdot 80 \cdot 1{,}00} = 3{,}125 \times 10^{-4} \text{ cm/s} \tag{70}$$

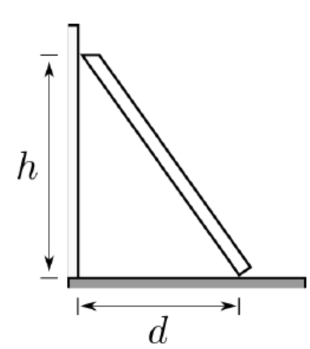
Finalmente, convertemos o resultado acima de cm/s para cm/h. Como 1 s = 1/3600 h:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = 1{,}125 \text{ cm/h} \tag{71}$$

A taxa média de crescimento quando a camada tem uma espessura de 3,00 cm vale 1,125 cm/h.

■

11. Um auxiliar de serviços gerais, de massa M, apoia a parte de cima de uma escada retilínea em uma parede lisa a uma altura h do piso. A escada tem comprimento ajustável e massa $m = M/4$ e seus pés emborrachados são apoiados no piso a uma distância d da parede. Se preciso, o auxiliar ajusta o comprimento da escada de acordo, e ao final desta operação, suponha que o centro de massa da escada permanece na metade de seu comprimento. O auxiliar deseja poder subir até o último degrau da escada e lá permanecer em pé em segurança, ou seja, sem que a escada escorregue. Assumindo que o coeficiente de atrito estático entre a borracha dos pés de apoio da escada e o piso é μ, determine o valor máximo da distância d em função das variáveis h e μ. A figura abaixo representa esquematicamente a posição da escada na situação pronta para ser usada.

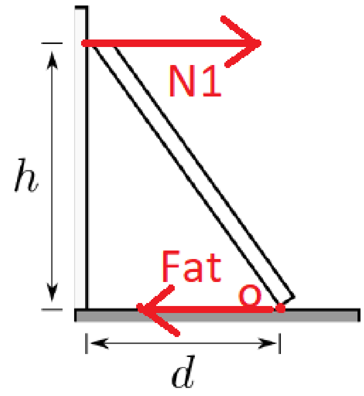


Resolução:

Precisamos encontrar o maior valor de d para a qual o sistema continue em equilíbrio estático. Para isso, não deve haver força resultante sobre a escada ($\vec{\boldsymbol{F}}_R$), de forma que ela permaneça **sem** aceleração ($\vec{\boldsymbol{a}}$), e não pode haver rotação, de forma que o torque resultante (τ_R) também deve ser nulo com relação a qualquer ponto de referência. Nos cálculos abaixo, vamos utilizar como referência o ponto O em que a escada encosta o chão.

Trataremos as forças horizontais (eixo x) separadamente das verticais (eixo y), de forma que:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{Rx} = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \text{e} \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{Ry} = \vec{\boldsymbol{0}} \tag{72}$$



Começaremos pelo eixo x. A figura abaixo mostra as forças que atuam ao longo dessa direção: a força normal $\vec{\boldsymbol{N}}_1$ que a parede exerce sobre a escada e a força de atrito estático que o chão exerce sobre ela.

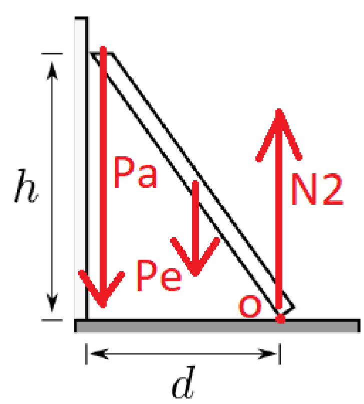
Aplicando a condição de equilíbrio:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_{at} = \vec{0} \tag{73}$$

Tomando como sentido positivo do eixo x para a direita:

$$N_1 - F_{at} = 0$$
$$N_1 = F_{at} \tag{74}$$

Observando agora as forças que atuam sobre a escada ao longo do eixo y, temos o pesos $\vec{\boldsymbol{P}}_e$ da escada e a força vertical que o auxiliar exerce na escada. Esta força tem a mesma magnitude e sentido do peso do auxiliar, por isso designamos tal força como $\vec{\boldsymbol{P}}_a$ na figura abaixo. Além disso, temos ainda a força normal $\vec{\boldsymbol{N}}_2$ que o chão exerce sobre a escada. Como o enunciado diz que a parede é "lisa", podemos desprezar a existência de atrito entre ela e a escada.



Aplicando novamente a condição de equilíbrio:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_2 + \vec{\boldsymbol{P}}_a + \vec{\boldsymbol{P}}_e = \vec{\boldsymbol{0}} \tag{75}$$

Tomando como sentido positivo do eixo y para cima:

$$N_2 - P_a - P_e = 0$$
$$N_2 = P_a + P_e \tag{76}$$

Finalmente, analisaremos a proposição de que o somatório dos torques deverá ser nulo para não haver rotações:

$$\tau_R = \sum_i \tau_i = 0 \tag{77}$$

Associaremos, por convenção, as tendências de rotação causadas por cada força em sentido anti-horário como torques positivos e, claro, as que ocorram em sentido horário como torques negativos. Observando as figuras acima e considerando o ponto O como referência, vemos que tanto $\vec{\boldsymbol{P}}_a$ quanto $\vec{\boldsymbol{P}}_e$ produzem tendências de rotação em sentido anti-horário, enquanto $\vec{\boldsymbol{N}}_1$ produz uma tendência no sentido horário. Observe também que $\vec{\boldsymbol{F}}_{at}$ e $\vec{\boldsymbol{N}}_2$ atuam no próprio ponto O, portanto possuem braço de alavanca nulo e não exercem torque.

Lembre agora que o módulo do torque de uma força é dado pelo produto do módulo dessa força pelo seu braço de alavanca. Este braço de alavanca, por sua vez, é definido como a distância perpendicular entre a linha de ação da força e o ponto de referência, no caso o ponto O. Pela análise das figuras, vemos que os braços de alavanca de $\vec{\boldsymbol{P}}_a$, $\vec{\boldsymbol{P}}_e$ e $\vec{\boldsymbol{N}}_2$ valem d, $d/2$ e h, respectivamente. Assim, levando em conta a convenção de sinais adotada acima, encontramos:

$$P_a\ d + P_e\ \frac{d}{2} - N_1\ h = 0 \tag{78}$$

Utilizando a equação 74 e expressando os pesos em termos das massas e da aceleração da gravidade, podemos escrever:

$$Mgd + \frac{Mg}{4}\frac{d}{2} - F_{at}\ h = 0 \tag{79}$$

Sabemos que a força de atrito estático deve satisfazer a relação:

$$F_{at} \leqslant \mu N_2 \tag{80}$$

Como queremos encontrar o maior d possível, devemos considerar a condição de iminência de movimento, ou seja:

$$F_{at} = \mu N_2 \tag{81}$$

Substituindo a equação 76 na equação acima, obtemos:

$$F_{at} = \mu(P_a + P_e) = \mu\frac{5Mg}{4} \tag{82}$$

Substituindo a equação acima na equação 79:

$$\frac{9Mg}{8}d = \mu\frac{5Mg}{4}h \tag{83}$$

Simplificando e isolando d, obtemos o valor máximo desejado:

$$d = \frac{10}{9}\mu h \tag{84}$$

O valor máximo de d é $\frac{10}{9}\mu h$.

■

12. Pequenas bolinhas de vidro maciço, de índice de refração $\eta_\nu = 1{,}30$, são brinquedos tradicionais em muitas regiões do Brasil. Dependendo da região em que se vive, são conhecidas como bolas de gude, bolitas, balebas, etc. Considere uma bolinha de vidro transparente de 20,0 mm de diâmetro na qual, durante sua fabricação, ficaram aprisionadas duas minúsculas bolhas de ar. Uma bolha (bolha A) ficou exatamente no centro da bolinha e a outra (bolha B) a 5,00 mm de sua superfície. Considere que uma pessoa aproxima a bolinha de vidro de seu olho, direcionando sua visão para a bolha de ar, com a bolha B mais próxima de si. A que distância, ao longo da linha de visada e em relação à superfície da bolinha, ela vê as imagens (a) da bolha A e (b) da bolha B?

Resolução:

Essa questão trata de um dioptro esférico, ou seja, um sistema onde a luz é refratada pela superfície esférica da bolinha. Nessa situação, sabemos que as posições p do objeto e p' da imagem medidas com relação à superfície (ao longo da linha de visada) estão relacionadas pela equação:

$$\frac{\eta_1}{p} + \frac{\eta_2}{p'} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{R}, \tag{85}$$

onde η_1 e η_2 são os índices de refração do meio onde se encontra o objeto e a imagem (quando real), respectivamente, e R é o raio da bolinha.

Como as bolhas se encontram dentro da bolinha, vemos que $\eta_1 = \eta_v = 1{,}3$ e $\eta_2 = \eta_{ar} \approx 1{,}0$. Além disso, devemos tomar $R = -10{,}0$ mm, uma vez que a superfície da bolinha é côncava quando vista a partir do objeto (o objeto está dentro da bolinha nos dois casos abaixo).

(a) Nesse caso, a bolha A está sobre o centro da bolinha e se encontra a uma distância $p = 10{,}0$ mm da superfície. Assim:

$$\frac{1{,}3}{10{,}0} + \frac{1{,}0}{p'} = \frac{(1{,}0 - 1{,}3)}{-10{,}0} \tag{86}$$

e:

$$p' = -10{,}0 \text{ mm} \tag{87}$$

O sinal negativo mostra que a imagem formada é virtual, isto é, ela é formada dentro da bolinha. Mais ainda, note que ela é formada sobre o centro da bolinha e portanto coincide com a posição da bolha. Esse resultado era esperado, uma vez que todos os raios de luz emitidos pela bolha incidem de forma normal à superfície da esfera, ao longo da direção radial. Assim, esses raios não são defletidos pela superfície, de forma que a imagem deve se formar na mesma posição do objeto.

A imagem é formada dentro da bolinha, a uma distância de 10,0 mm da superfície.

■

(b) Nesse caso, a bolha B está a uma distância $p = 5{,}0$ mm da superfície da bolinha, ao longo da linha de visada da pessoa. Assim:

$$\frac{1{,}3}{5{,}0} + \frac{1}{p'} = \frac{(1{,}0 - 1{,}3)}{-10{,}0} \tag{88}$$

e:

$$p' = -4,35 \text{ mm} \tag{89}$$

Mais uma vez, o sinal negativo mostra que a imagem é virtual, sendo formada dentro da bolinha.

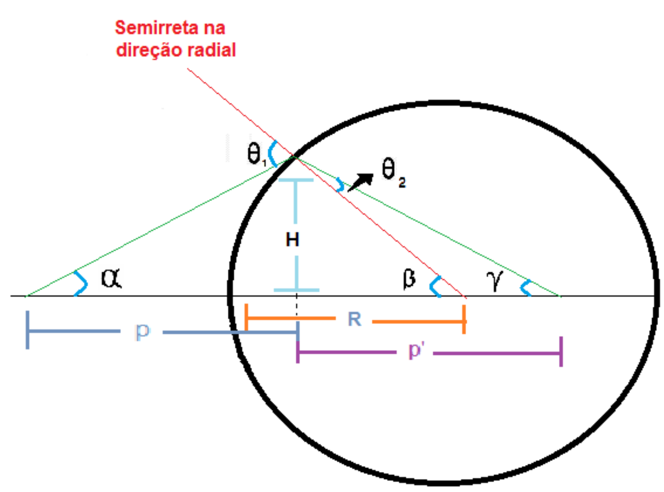
A imagem é formada dentro da bolinha, a uma distância de 4,35 mm da superfície.

■

Demonstração:

Vamos deduzir a equação 85 utilizada acima. Para facilitar, vamos supor que o objeto se encontra fora da bolinha, ao contrário das situações acima. Como discutimos acima, basta considerar um raio de curvatura negativo quando o objeto está do lado de dentro.

Considere um objeto puntiforme (como as bolhas acima) localizado sobre o eixo horizontal, como mostra a figura abaixo. A linha verde mostra o caminho de um raio de luz emitido por ele após ser refratado pela superfície. Note que um outro raio emitido ao longo do eixo não sofreria qualquer deflexão, de forma que a imagem deve se formar no próprio eixo, na posição indicada. Note ainda que as posições p e p' estão indicadas com relação à projeção do ponto de incidência do raio sobre o eixo horizontal.



Como a bolinha estará próxima ao olho da pessoa, sabemos que os ângulos mostrados na figura serão pequenos. Nessa situação, podemos utilizar as aproximações:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{H}{p}$$
$$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{H}{p'}$$
$$\beta \approx \tan\beta \approx \text{sen}\ \beta = \frac{H}{R} \tag{90}$$

Sabemos também, pela figura, que:

$$\theta_1 = \alpha + \beta$$
$$\theta_2 = \beta - \gamma \tag{91}$$

Pela lei de Snell-Descartes da refração, temos:

$$\eta_1 \ \sin\theta_1 = \eta_2 \ \sin\theta_2 \tag{92}$$

Para ângulos pequenos, podemos aproximá-la para:

$$\eta_1 \ \theta_1 = \eta_2 \ \theta_2 \tag{93}$$

Substituindo as eqs. 91 na eq. acima:

$$\eta_1 \ (\alpha + \beta) = \eta_2(\beta - \gamma) \tag{94}$$

Substituindo agora as eqs. 90, obtemos:

$$\eta_1 \left(\frac{H}{p} + \frac{H}{R}\right) = \eta_2 \left(\frac{H}{R} - \frac{H}{p'}\right) \tag{95}$$

Finalmente, eliminando H e simplificando, obtemos o resultado desejado:

$$\frac{\eta_1}{p} + \frac{\eta_2}{p'} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{R} \tag{96}$$

Note ainda que, para ângulos pequenos, podemos medir p e p' com relação a superfície da bolinha, ao longo do eixo horizontal.