Olimpíada Brasileira de Física
Prova Ensino Médio - 3º e 4º anos - Nível III
Segunda Fase - 2018

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito elaborado pela equipe do projeto de extensão *Elaboração de Material de Preparação para a Olimpíada Brasileira de Física (OBF)*, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IF-UFRJ).

Equipe

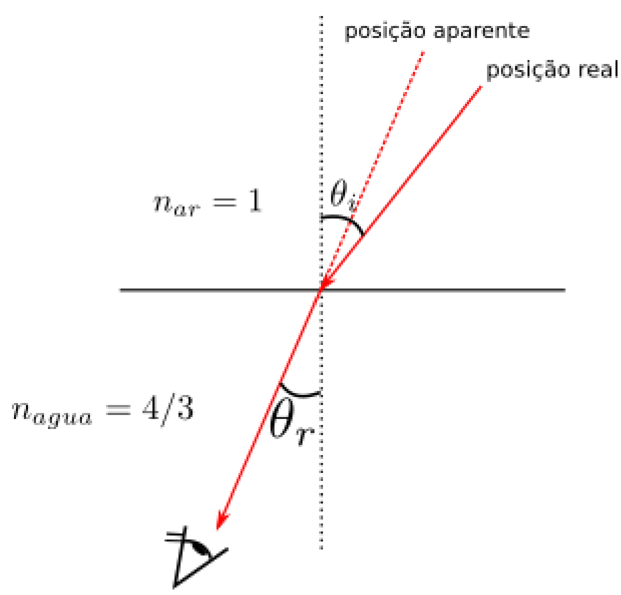
Giovanni de Lima Saisse, Hariom Nunes Choudhury, João Octavio Oliveira Cony
Lucas Bianchi Marcianesi, Maria Clara Vicente Coelho, Sidney Natzuka Junior

Revisão

Prof. Marcos G. Menezes, Prof. Rodrigo B. Capaz

1. Um banhista mergulha em uma clara manhã e, de dentro da água vislumbra o Sol numa inclinação com a vertical que estima estar em torno de 30°. Sabendo que neste local, o Sol surge na linha do horizonte às seis horas da manhã e atinge o zênite ao meio dia, calcule que horas serão aproximadamente no local naquele momento. Considere o índice de refração da água é 4/3 e o do ar igual a 1.

Resolução
Na figura abaixo, esquematizamos a situação:



Como podemos ver na figura, o banhista observará o Sol fora de sua posição real, devido ao desvio sofrido pela luz ao mudar de meio. Para ele, o Sol estará na posição referente ao prolongamento do feixe que chega ate ele, como indica a linha tracejada vermelha na figura.

Sabemos pelo enunciado que a inclinação observada pelo banhista com a vertical é $\theta_r = 30°$. Assim, usando a lei de Snell para a refração:

$$n_{ar}\,\text{sen}(\theta_i) = n_{agua}\,\text{sen}(\theta_r) \tag{1}$$

Substituindo os valores para encontrar θ_i (que será o angulo real que o raio de luz do Sol com relação à vertical) na equação acima, obtemos:

$$\text{sen}(\theta_i) = \frac{4}{3}\,\text{sen}(30°) = \frac{2}{3}$$

$$\theta_i = \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 42° \tag{2}$$

De posse desse ângulo, podemos descobrir a hora local utilizando a informação de que, quando $\theta_i = 0$, o Sol atinge o zênite e a hora é meio dia e, quando $\theta_i = 90°$, o Sol está na linha do horizonte e a hora é seis da manhã.

Sabemos que a relação entre a hora local H e o valor de θ_i é linear. Portanto, podemos escrever uma função com a forma:

$$H = A\theta_i + B \tag{3}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas a partir das informações acima.

Substituindo os valores referentes ao zênite:

$$12 \text{ h} = A \cdot 0 + B \tag{4}$$

Concluimos então que $B = 12$ h. Em seguida, de posse de B, aplicamos o valor do amanhecer:

$$6 = 90A + 12 \tag{5}$$

de onde determinamos que $A = -1/15$ h/°. Finalmente, aplicamos o valor encontrado para θ_i observado pelo banhista para encontrar a hora local:

$$H = -\frac{1}{15} \cdot 42 + 12 = 9{,}2\,\text{h} \tag{6}$$

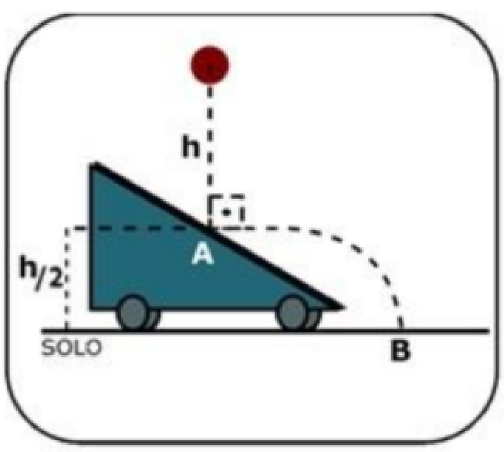
Devemos converter a parte decimal para minutos: como 1 h = 60 min então, por uma simples regra de três obtemos 0,2 h=12 min.

Determinamos então que a hora local é, aproximadamente, 9h20min.

Resposta: A hora local é, aproximadamente, 9h20min.

■

2. Uma esfera de massa **m** é abandonada de uma altura **h** em relação ao ponto A no declive da cunha triangular de massa **M = 2m**, montada sobre rodas, conforme mostra figura abaixo. A esfera choca-se elasticamente com a cunha no ponto A, que se encontra a uma altura **h/2** do solo (ver figura) e após a colisão é lançada horizontalmente até atingir o solo no ponto B. Desprezando os efeitos de possíveis forças de resistência existentes no sistema, determine a velocidade da esfera ao atingir o ponto B.



Resolução

O primeiro passo é descobrir a velocidade v_0 que a esfera possui no momento em que atinge o ponto A. Para isso, utilizamos o princípio de conservação da energia mecânica, já que não há dissipação durante o movimento de queda dela. O instante inicial corresponde ao exposto na figura acima, onde a velocidade da esfera é nula, logo só há energia potencial U_i. Já no instante final a esfera encontra-se no ponto A, onde a energia potencial é nula (tomando este ponto como zero de energia) e só há energia cinética K_f. De acordo com a conservação da energia, obtemos:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ U_i &= K_f \\ \cancel{m}gh &= \cancel{m}\frac{{v_0}^2}{2} \\ v_0 &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{7}$$

Agora iremos calcular a velocidade horizontal v_x da esfera logo após a colisão com a cunha. Considerando que a colisão ocorre durante um intervalo de tempo suficientemente pequeno de forma que a ação do peso da esfera é desprezível, podemos assumir que há conservação do momento linear do sistema. Além disso, como a colisão é elástica, há também conservação da energia cinética.

Para relacionar os momentos inicias e finais, vamos separá-los em suas componentes horizontal e vertical. Inicialmente, não temos movimento na horizontal, logo o momento horizontal do sistema é nulo. No final, a esfera possui velocidade horizontal v_x para a direita e a cunha V_x para a esquerda. Assim, a conservação do momento linear horizontal dá:

$$
\begin{aligned}
p_I &= p_F \\
0 &= mv_x - MV_x \\
2\cancel{m}V_x &= \cancel{m}v_x \\
V_x &= \frac{v_x}{2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Na vertical, a velocidade da esfera imediatamente antes da colisão tem módulo v_0 e, imediatamente após a colisão, somente a cunha adquire velocidade com uma componente vertical V_y, já que o lançamento da esfera é horizontal. A conservação do momento linear vertical nos dá:

$$
\begin{aligned}
mv_0 &= MV_y \\
\cancel{m}v_0 &= 2\cancel{m}V_y \\
V_y &= \frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Para a conservação da energia cinética, consideramos o módulo da velocidade final da cunha como $V^2 = {V_x}^2 + {V_y}^2$. Assim:

$$
\begin{aligned}
K_I &= K_F \\
m\frac{{v_0}^2}{2} &= m\frac{{v_x}^2}{2} + M\frac{V^2}{2} \\
\cancel{m}\frac{\cancel{2}gh}{\cancel{2}} &= \cancel{m}\frac{{v_x}^2}{2} + 2\cancel{m}\frac{({V_x}^2 + {V_y}^2)}{\cancel{2}} \\
gh &= \frac{{v_x}^2}{2} + \frac{{v_x}^2}{4} + \frac{gh}{2} \\
\frac{gh}{2} &= \frac{2{v_x}^2 + {v_x}^2}{4} = \frac{3{v_x}^2}{4} \\
{v_x}^2 &= \frac{2gh}{3}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Após o lançamento horizontal a partir do ponto A, podemos utilizar mais uma vez a conservação de energia para descobrir a velocidade da esfera no ponto B. Considerando agora a energia potencial no ponto B como zero, teremos:

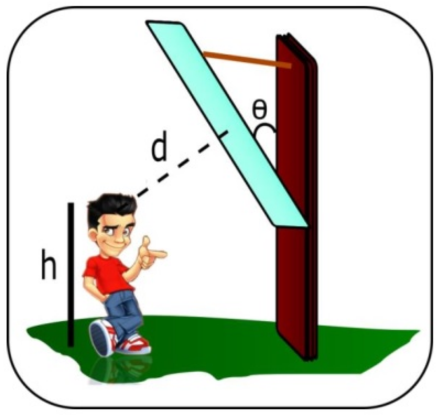
$$
\begin{aligned}
U_A + K_A &= K_B \\
mg\frac{h}{2} + m\frac{v_x^2}{2} &= m\frac{v_B^2}{2} \\
mg\frac{h}{2} + m\frac{2gh}{6} &= m\frac{v_B^2}{2} \\
\\
v_B^2 &= gh + \frac{2gh}{3} \\
v_B &= \sqrt{\frac{5gh}{3}}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Resposta: A velocidade da esfera ao atingir o ponto B é igual a $\sqrt{\frac{5gh}{3}}$.

OBS: Note que a componente vertical da velocidade V_y adquirida pela cunha dará origem a uma colisão dela com o solo, possivelmente inelástica. No entanto, este fato não é relevante para a nossa análise, onde consideramos apenas o instante imediatamente após a colisão entre a esfera e a cunha e depois o movimento subsequente da esfera.

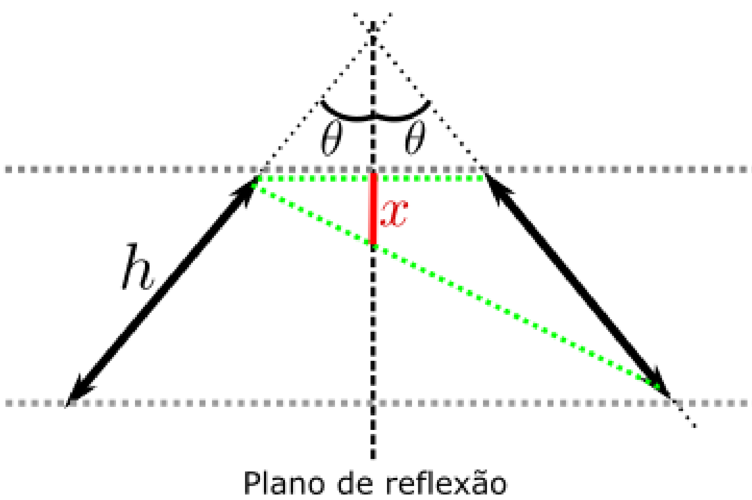
■

3. A figura mostra uma pessoa de altura h em frente a um espelho plano inclinado de ângulo θ em relação a parede vertical. O topo da cabeça do homem está a uma distância mínima d do plano do espelho. Qual deve ser o mínimo tamanho do espelho em que a pessoa possa ver seu corpo inteiro através do mesmo?



Resolução

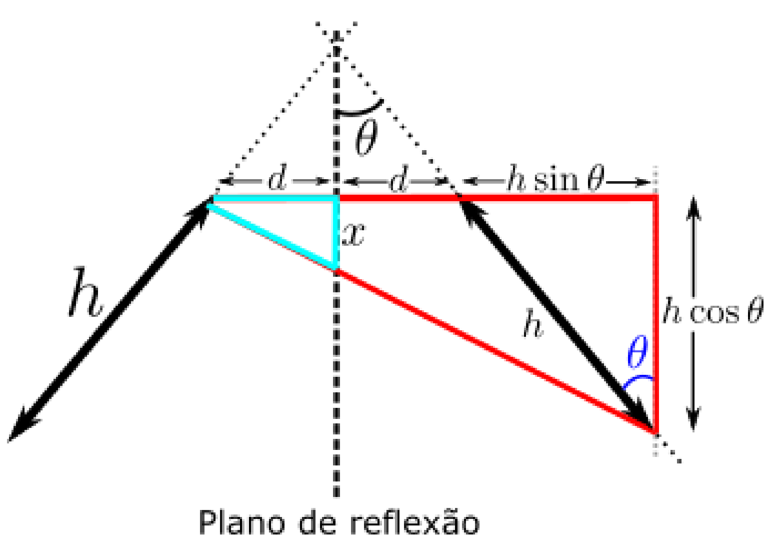
Na figura abaixo, esquematizamos a situação colocando o plano de reflexão na vertical.



Ao lado esquerdo, a seta preta representa o objeto (o corpo da pessoa), que está inclinado nessa esquematização. Ao lado direito, montamos sua imagem de acordo com as leis usuais da ótica geométrica para espelhos planos. Uma maneira de fazê-lo, é olhar para as extremidades do objeto (pé e cabeça), e construir a imagem desses pontos de forma que as distancias entre eles e o espelho sejam as mesmas de suas respectivas imagens.

Para que a pessoa possa observar seu corpo por inteiro atraves do espelho, é necessário que os prolongamentos dos raios de luz oriundos das extremidades da imagem consigam chegar aos seus olhos, como mostram as linhas verdes pontilhadas na figura. Portanto, o menor tamanho possível que este espelho pode ter é o valor x representado em vermelho na figura. Vamos calculá-lo.

Com base nesses raios, podemos construir dois triângulos retângulos, como mostrado na figura abaixo.



Para o triângulo menor(azul claro), seus catetos são a distância da cabeça do indivíduo ao espelho, d, e o tamanho mínimo do espelho, x. Para determinar os catetos do triângulo maior (vermelho), usamos o ângulo θ e h (tamanho do objeto e da imagem), como mostra a figura. Utilizando semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{d}{x} = \frac{2d + h\ \mathrm{sen}(\theta)}{h\cos(\theta)} \tag{12}$$

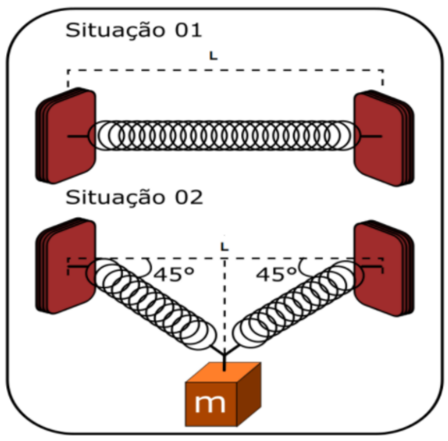
Assim, o tamanho mínimo que o espelho deve ter é:

$$x = \frac{d\ h\cos(\theta)}{2d + h\mathrm{sen}(\theta)} \tag{13}$$

Resposta: O tamanho mínimo do espelho é $\frac{d\ h\cos(\theta)}{2d + h\mathrm{sen}(\theta)}$.

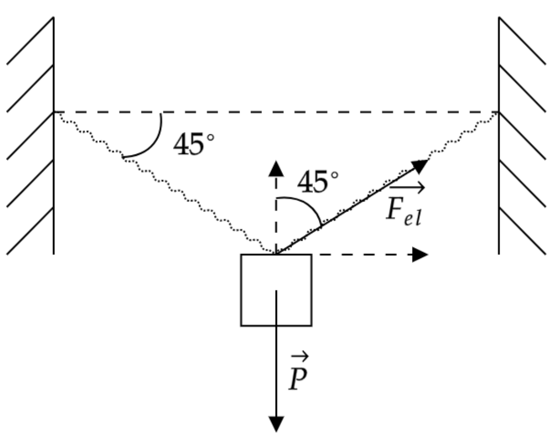
■

4. Considere o esquema da Situação 1 onde a mola de comprimento L, constante elástica K e massa desprezível fica sem deformação entre dois suportes de apoio. Um corpo de massa m é colocado pendente no ponto médio da mola, causando deformação na mesma de tal modo que o equilíbrio é estabelecido conforme indica a Situação 2. Determine o valor da massa m para que o sistema fique em equilíbrio na situação apresentada.



Resolução:

O diagrama de forças que atuam sobre o corpo na situação 2 é mostrado abaixo:



Estão representadas a forças peso e a força elástica exercida por uma das metades da mola. A força elástica exercida pela outra metade tem um comportamento análogo. Nós decompomos, como é comum, a força elástica de ambos os lados da mola ao longo das direções horizontal e vertical. Como o corpo está em equilíbrio, percebemos que as componentes horizontais das forças elásticas se cancelam. Além disso, como os ângulos que elas fazem com a horizontal é o mesmo, seus módulos também devem ser iguais. Isto era esperado, já que as duas metades da mola são idênticas.

Para o eixo vertical, a condição de equilíbrio impõe que a soma das componentes das forças ao longo desse eixo deve ser igual a zero. Como as componentes verticais das duas forças elásticas são idênticas, podemos escrever:

$$2F_{el,y} - P = 0$$
$$2F_{el} \text{ sen } 45^\circ = mg$$
$$F_{el} = \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg \tag{14}$$

Por outro lado, pela lei de Hooke, sabemos que $F_{el} = K\Delta x$, onde Δx é a deformação **total** sofrida pela mola. O comprimento total da mola na situação 2 é $L + \Delta x$, de forma que o comprimento de cada metade é $L/2 + \Delta x/2$, ou seja, cada metade da mola sofre metade da deformação total. Assim, analisando o triângulo retângulo definido por cada metade da mola, obtemos:

$$\frac{L}{2} = \left(\frac{L + \Delta x}{2}\right)\cos 45^\circ$$
$$\Delta x = (\sqrt{2} - 1)L \tag{15}$$

Reunindo os resultados na equação 14, podemos encontrar a massa do bloco:

$$K(\sqrt{2} - 1)L = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

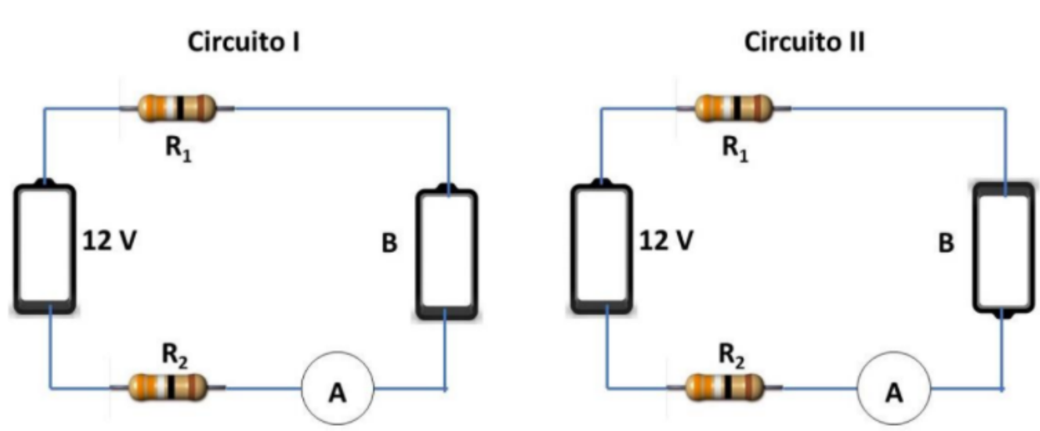
$$m = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)KL}{g}$$
$$= \frac{(2 - \sqrt{2})KL}{g} \tag{16}$$

OBS: Note que, como cada metade da mola se deforma de metade da deformação total e a lei de Hooke aplicada a esta deformação deve resultar na força elástica F_{el}, concluímos que cada metade da mola tem uma constante de mola efetiva $2K$. Este resultado poderia ser utilizado desde o princípio como uma forma alternativa de resolver a questão.

Resposta: Para que o sistema fique em equilíbrio na configuração indicada, a massa do bloco deve valer $(2 - \sqrt{2})KL/g$.

■

5. No arranjo experimental da figura abaixo, os circuitos I e II foram montados com malhas simples, contendo os resistores R_1 e R_2, uma bateria de 12V e outra bateria B de força eletromotriz desconhecida. Na montagem do circuito I, o amperímetro, A, indicou uma corrente, $I_1 = 2$ A, e, na montagem do circuito II, indicou uma corrente, $I_2 = 6$ A. As resistências internas das duas baterias e do amperímetro são de valor desprezível. Qual o valor da força eletromotriz da bateria B?



Resolução:

Chamaremos de ε_A e ε_A, respectivamente, as forças eletromotrizes das baterias de 12V e B. Consideramos ainda que as baterias possuem o polo positivo onda há o pino, como em baterias comuns. Vamos supor inicialmente que, em ambos os circuitos, a corrente flui em sentido horário. Para o circuito I, esta suposição é óbvia, mas para o circuito I isso implica em $\varepsilon_A > \varepsilon_B$. Se obtivermos a relação contrária em nossos cálculos, isso implica apenas que o sentido da corrente neste circuito é contrário ao de nossa suposição inicial.

Devido ao caráter conservativo da força elétrica neste problema, sabemos que a variação de potencial elétrico ΔV ao sairmos de um ponto do circuito, darmos a volta no circuito e retornarmos ao mesmo ponto é igual a zero. Este resultado é conhecido como a lei das malhas de Kirchoff.

Dessa forma, podemos escolher um ponto (digamos, o canto inferior esquerdo) e "percorrer" o circuito no sentido horário, perdendo ou ganhando potencial, até o momento em que voltamos ao ponto original. Fazendo este percurso para o primeiro circuito (corrente i_1), obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_A - R_1 i_1 - \varepsilon_B - R_2 i_1 &= 0 \\ -(R_1 + R_2) i_1 + \varepsilon_A - \varepsilon_B &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Na equação acima, note que os resistores produzem uma queda de potencial dada pela lei de Ohm quando caminhamos no sentido da corrente. A bateria A produz um acréscimo de potencial pois a corrente em seu interior está no sentido usual, do terminal negativo para o positivo. Na bateria B, o contrário ocorre.

Repetindo o procedimento para o segundo circuito (corrente i_2), obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_A - R_1 i_2 + \varepsilon_B - R_2 i_2 &= 0 \\ -(R_1 + R_2) i_2 + \varepsilon_A + \varepsilon_B &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Neste caso, as duas baterias estão associadas em série e produzem um acréscimo de potencial quando caminhamos no sentido da corrente.

Definindo $R_{eq} = R_1 + R_2$ como a resistência equivalente dos dois resistores associados em série nas duas situações, as equações acima definem um sistema para as variáveis ε_B e R_{eq}. Substituindo os valores informados no enunciado nas equações acima, encontramos:

$$\begin{aligned} -R_{eq} 2 + 12 - \varepsilon_B &= 0 \\ -R_{eq} 6 + 12 + \varepsilon_B &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

onde R_{eq} é dado em Ohms e ε_B em Volts.

Multiplicando a primeira equação por -3 e somando com a segunda, obtemos:

$$(-36 + 12) + (3\varepsilon_B + \varepsilon_B) = 0 \tag{20}$$

o que nos leva diretamente ao resultado:

$$4\varepsilon_B = 24 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_B = 6 \text{ V} \tag{21}$$

Perceba que não precisamos encontrar o valor da resistência equivalente (por curiosidade, bastaria somar ambas as equações e encontraríamos $R_{eq} = 3\ \Omega$). Note ainda que $\varepsilon_A > \varepsilon_B$, o que está em acordo com a nossa suposição inicial para o sentido da corrente nos dois circuitos.

Resposta: A força eletromotriz da bateria B vale 6 V.

■

6. Um motorista desliga o motor do seu carro, mas por esquecimento, deixa as luzes das lanternas dianteiras e traseiras acesas durante 2 minutos. A potência da lâmpada de cada lanterna é de 10 W e a tensão na bateria permanece constante e igual a 12 V. Ao ligar o motor, a bateria é recarregada pela corrente gerada pelo alternador. Considere que esta corrente permanece constante e igual a 30 A e a tensão na bateria não se altera. Nestas condições:

   (a) Quanto tempo é necessário para repor a carga perdida pela bateria, considerando que as lanternas estão desligadas?

   (b) Quanto tempo é necessário para repor a carga perdida pela bateria considerando que as lanternas permanecem acesas e que todos os elementos do circuito estão associados em paralelo ao alternador?

   Resolução:

(a) Primeiramente, calculemos a energia perdida durante os 2 minutos em que as lanternas ficaram acesas. Tratam-se de quatro lanternas acesas, cada uma dissipando energia com uma potência de 10 W, ou seja, estão sendo dissipados 40 Joules por segundo. Como 2 minutos correspondem a 120 segundos, a energia total dissipada é:

$$\Delta E = 40 \text{ J/s} \cdot 120 \text{ s} = 4800 \text{ J}. \tag{22}$$

Em seguida, calculemos quanta energia é fornecida por segundo assim que o alternador é religado. Como a voltagem da bateria é $U = 12$ V e a corrente que passa por ela é $i = 30$ A, a potência fornecida é:

$$P = U\ i = 12 \cdot 30 = 360 \text{ W} \tag{23}$$

Se o objetivo é recarregar 4800 Joules e o motor fornece 360 Joules por segundo, o tempo necessário para o processo será:

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{4800}{360} \approx 13 \text{ s}. \tag{24}$$

O tempo necessário para recarregar a bateria com as lanternas desligadas é de aproximadamente 13 segundos.

■

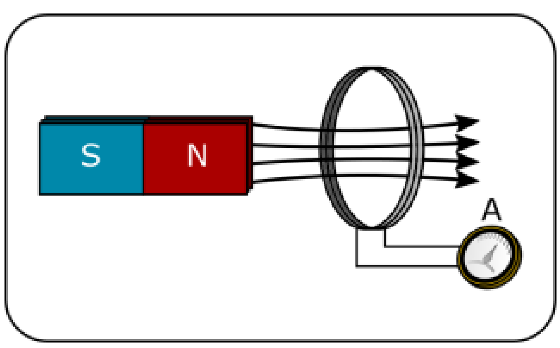
(b) Já sabemos que foi perdido 4800 Joules enquanto o motor estava desligado. Ao ligarmos o motor com as lâmpadas também ligadas, como todos os componentes estão em paralelo com ele, nem todos os 30 amperes fornecidos irão para a bateria e uma parcela será direcionada para alimentar as lâmpadas. Sabendo que 10 watts são consumidos por cada lanterna e que o motor continua fornecendo 360 W ao circuito (uma vez que ele está submetido à mesma voltagem e corrente da situação anterior), a energia fornecida à bateria por unidade de tempo agora vale $P' = 360 - 40 = 320$ W. Assim, o tempo necessário para recarregar a bateria nesse caso é

$$\Delta t' = \frac{\Delta E}{P'} = \frac{4800}{320} = 15 \text{ s} \tag{25}$$

O tempo necessário para recarregar a bateria com as lanternas acesas é de 15 segundos.

■

7. A variação de campo magnético pode gerar uma corrente elétrica. A comprovação dessa proposição foi feita pelo físico e químico inglês Michael Faraday. Com um pedaço do fio é construída uma espira circular plana, ligada a um amperímetro e submetida a uma variação de fluxo magnético através do movimento de um imã, como mostrado na figura.



O imã, inicialmente mantido a certa distância da espira, ao ser aproximado com o seu polo norte incidindo perpendicularmente ao centro da espira, estabelece uma variação de fluxo magnético igual a 6,0 x 10^{-2} Wb num curto intervalo de tempo de 2,0 x 10^{-1} s.

(a) Determine o valor da força eletromotriz induzida na espira.

(b) Calcule o valor da corrente induzida, indicada pelo amperímetro, sabendo que a resistência da espira é igual a 0,5 Ω.

Resolução:

(a) Sendo $\Delta\Phi = 6{,}0 \times 10^{-2}$ Wb a variação de fluxo magnético e $\Delta t = 2{,}0 \times 10^{-1}$ s o intervalo correspondete à variação, a lei da indução de Faraday nos diz que a força eletromotriz induzida $\mathcal{E}$ é dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{6{,}0 \times 10^{-2}}{2{,}0 \times 10^{-1}} = -3{,}0 \times 10^{-1} \text{ V} \tag{26}$$

O sinal negativo nos diz que a força eletromotriz deve ter um sentido de forma a contrariar a variação de fluxo, em acordo com a lei de Lenz. O módulo corresponde ao valor pedido.

O valor da força eletromotriz induzida na espira é $3{,}0 \times 10^{-1}$ Volts.

■

(b) Considerando o amperímetro ideal (resistência nula) e a resistência $R = 0{,}5\ \Omega$ da espira, podemos utilizar a lei de Ohm para calcular a intensidade da corrente induzida:

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{3{,}0 \times 10^{-1}}{5{,}0 \times 10^{-1}} = 0{,}6 \text{ A} \tag{27}$$

O valor da corrente induzida na espira é $0{,}6$ amperes.

■

8. De acordo com a teoria da relatividade, a energia relativística pode se relacionar com a massa m da partícula em repouso e com o quadrado da velocidade da luz no vácuo (c), Estimar (em toneladas) a massa de gelo a 0°C que poderíamos fundir com a energia relativística de 1g de areia.

Resolução:

Utilizando a relação de Einstein, a energia relativística de $m = 1$ g $= 10^{-3}$ kg de areia é:

$$E = mc^2 = (1 \times 10^{-3}) \cdot (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J}, \tag{28}$$

onde utilizamos que $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s.

Por outro lado, com base nas informações da prova, o calor latente de fusão do gelo vale $L = 80$ cal/g $=$ 320 J/g. Assim, a massa de gelo que pode ser derretida com a energia acima vale, aproximadamente:

$$m_g = \frac{E}{L} = \frac{9 \times 10^{13} \text{ J}}{320 \text{ J/g}} \approx 2{,}8 \times 10^{11} \text{g}. \tag{29}$$

Finalmente, como 1 tonelada $= 10^6$ g, o valor da massa acima em toneladas é:

$$m_g = 2{,}8 \times 10^5 \text{ t} \tag{30}$$

Com a energia relativística de 1g de areia, é possível derreter aproximadamente $2{,}8 \times 10^5$ toneladas de gelo.

■