**Olimpíada Brasileira de Física**
**Prova Ensino Fundamental - 1º e 2º anos - Nível II**
**Segunda Fase - 2018**

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Gabarito elaborado pela equipe do projeto de extensão *Elaboração de Material de Preparação para a Olimpíada Brasileira de Física (OBF)*, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IF-UFRJ).


**Equipe**

Giovanni de Lima Saisse    Hariom Nunes Choudhury    João Octavio Oliveira Cony
Lucas Bianchi Marcianesi    Maria Clara Vicente Coelho    Sidney Natzuka Junior

**Revisão**

Prof. Marcos G. Menezes    Prof. Rodrigo B. Capaz


---

1. Um estudante sai de casa às 7:00 h para ir à escola, distante quatro quarteirões de sua casa. Sua casa está localizada no meio do primeiro quarteirão a 60 m da esquina. Ele gasta 1,5 minutos para ir até a esquina. Atravessa o primeiro quarteirão, de 120 m, em 4,0 minutos e o quarteirão seguinte, de 100 m, em 3,0 minutos. A escola está localizada no meio do 4º quarteirão, a 60 m da esquina, e o estudante leva 1,5 minutos para finalizar o percurso. Qual a velocidade escalar média do estudante no percurso de sua casa até a escola?

**Resolução**

Para obtermos a velocidade média do estudante ao longo do percurso descrito devemos, primeiramente, calcular seu deslocamento total $\Delta x$ e o intervalo de tempo $\Delta t$ no qual esse deslocamento foi realizado.

$$\Delta x = (60 + 120 + 100 + 60) \text{ m} = 340 \text{ m} \tag{1}$$

$$\Delta t = (1{,}5 + 4{,}0 + 3{,}0 + 1{,}5) \text{ min} = 10{,}0 \text{ min} = 600{,}0 \text{ s} \tag{2}$$

Para que todas as unidades estivessem no sistema internacional de unidades, o intervalo de tempo foi convertido de minutos para segundos multiplicando-se o valor encontrado por 60, quantidade de segundos que há em 1 minuto.

Por fim, utilizando a fórmula de velocidade média, temos:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{340 \text{ m}}{600{,}0 \text{ s}} = 0{,}567 \text{ m/s} \tag{3}$$

**Resposta: A velocidade escalar média do estudante foi de 0,567 m/s.**

■

2. A figura abaixo mostra dois níveis de referências A e B, localizados em relação ao solo pelas distâncias verticais $H$ e $h$ respectivamente. Um corpo de massa $m$ é abandonado do nível A e após colidir com o solo eleva-se até o nível B e assim sucessivamente o corpo quica várias vezes com o solo elevando-se a novos níveis.
Desprezando os efeitos do ar e considerando o coeficiente de restituição de energia **(e)** durante colisão, determine:

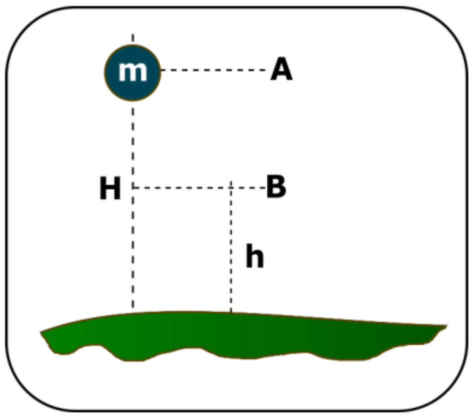
**a)** os trabalhos da força gravitacional entre os níveis A e B e os classifique como motor ou resistente.

**b)** a altura do nível atingido por este corpo após N colisões sucessivas.

**Resolução:**

**a)** O trabalho $W$ de uma força conservativa, como a força peso, pode ser escrito como menos a diferença da energia potencial dos dois pontos de interesse.

$$W = -\Delta U \tag{4}$$




Tomando, primeiramente, o movimento de queda do corpo de A até o solo, onde as energias potenciais são, respectivamente $U_A$ e $U_0$:

$$W_1 = U_A - U_0 = mgH - mg(0) = mgH, \tag{5}$$

onde tomamos o zero de energia potencial no solo. Como $H > 0$, temos $W_1 > 0$. Quando o trabalho realizado por uma força é positivo, trata-se de um trabalho *motor*.

Quando o corpo sobe do solo até B, onde as energias potenciais são respectivamente $U_0$ e $U_b$:

$$W_2 = U_0 - U_B = mg(0) - mgh = -mgh. \tag{6}$$

Como $h > 0$, temos $W_2 < 0$. Já que ele é negativo, trata-se de um trabalho *resistente*.

O trabalho total $W$ é dado pela soma dos dois trabalhos calculados anteriormente

$$W = W_1 + W_2 = mgH - mgh = mg(H - h). \tag{7}$$

Como $H > h$, temos $W > 0$. Portanto, o trabalho total realizado pela força peso do ponto A até o ponto B é *motor*.

**OBS:** De forma equivalente, poderíamos ter calculado $W$ considerando apenas a variação de energia potencial gravitacional entre os pontos $A$ e $B$.

**Resposta**: O trabalho total realizado pela força peso no deslocamento entre os níveis A e B vale $mg(H - h)$ e é um trabalho motor.

■

**b)** Desconsiderando a resistência do ar, por conservação de energia, $U_A$ deve ser igual a energia cinética $K_1$ do corpo logo antes dele colidir com o solo. Assim:

$$U_A = mgH = K_1 = \frac{mv_!^2}{2} \tag{8}$$

$$v_1 = \sqrt{2gH} \tag{9}$$

Pela mesma lógica, a energia cinética $K_2$ do corpo logo após a colisão, é igual a $U_B$. Portanto:

$$U_B = K_2 = mgh = \frac{mv_2^2}{2} \tag{10}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} \tag{11}$$

O coeficiente de restituição da colisão $e$ é dado pela razão entre o módulo da velocidade com que o corpo se afasta do solo imediatamente depois da colisão e o módulo da velocidade com que o corpo se aproxima imediatamente antes. Neste caso, essas velocidades serão $v_2$ e $v_1$, respectivamente. Com isso:

$$e = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}} \tag{12}$$

$$e^2 = \frac{h}{H} \tag{13}$$

Resta relacionar o coeficiente de restituição $e$ com a altura que o corpo alcança depois de N colisões. Como $H$ é a altura com 0 colisões, e $h$ com uma colisão, pode-se reescrever a equação **(10)** da seguinte maneira

$$e^2 = \frac{y_1}{y_0} \tag{14}$$

onde $y_n$ representa a altura após a enésima colisão. Como $e$ é constante, essa equação pode ser generalizada para as colisões seguintes:

$$e^2 = \frac{y_n}{y_{n-1}} \tag{15}$$

Essa relação, que diz que *a proxima altura é a altura anterior vezes um termo constante*, caracteriza uma *progressão geométrica*, onde o primeiro termo $y_0$ é a altura inicial $H$, e a razão $r$ é

$$r = e^2 = \frac{h}{H} \tag{16}$$

O enésimo termo de uma P.G. é dado pela seguinte expressão:

$$y_n = y_0 r^n \tag{17}$$

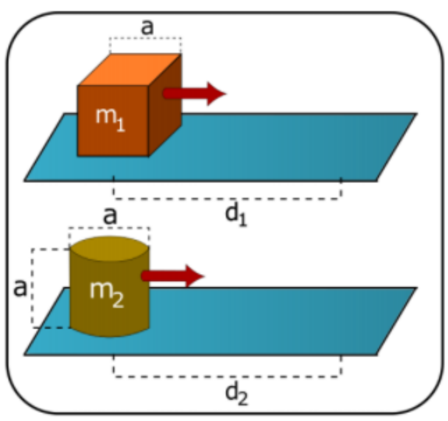
Logo, a altura $y$ depois de $N$ colisões é

$$y_N = H\left(\frac{h}{H}\right)^N \tag{18}$$

**Resposta**: A altura atingida pelo corpo depois de $N$ colisões vale $H(h/H)^N$.

■

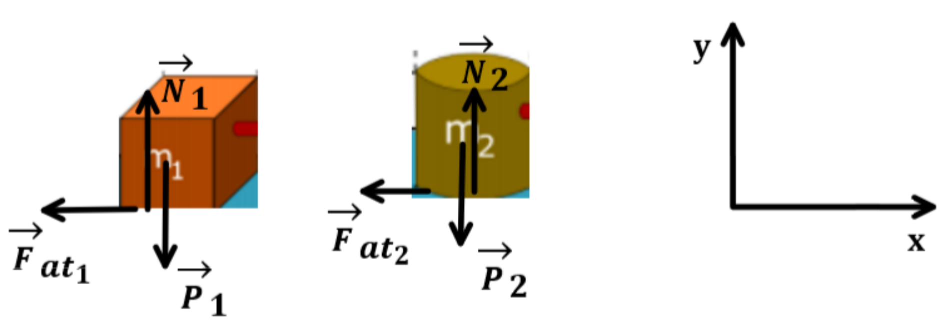
3. As figuras abaixo mostram duas situações, nas quais dois blocos de formas cúbica e cilíndrica feitos do mesmo material, homogêneo, isotrópico com distribuição uniforme e que serão lançados sobre as superfícies horizontais e rugosas de mesmo coeficiente de atrito. Os blocos cúbico e cilíndrico são lançados com as energias cinéticas $\mathbf{K_1}$ e $\mathbf{K_2}$ respectivamente. Sejam $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ as distâncias percorridas pelos blocos cúbico e cilíndrico respectivamente sobre a superfície rugosa até parar, de forma que $\mathbf{d_1} = \mathbf{3d_2}$. Determine a razão $\mathbf{K_1/K_2}$.




**Resolução**

Para resolver a questão, utilizaremos a 2ª Lei de Newton e a Equação de Torricelli.

Primeiramente, iremos determinar a força resultante $\vec{\boldsymbol{F}}_{R_n}$ sobre cada bloco. Para isso, analisamos o diagrama de forças de cada bloco abaixo, contendo as forças normal $\vec{\boldsymbol{N}}_n$, peso $\vec{\boldsymbol{P}}_n$ e de atrito $\vec{\boldsymbol{F}}_{at_n}$:




No eixo $Y$, os blocos de massas $m_n$ não possuem aceleração, então temos:

$$|\vec{\boldsymbol{N}}_n| - |\vec{\boldsymbol{P}}_n| = 0 \Rightarrow |\vec{\boldsymbol{N}}_n| = |\vec{\boldsymbol{P}}_n| = m_n|\vec{\boldsymbol{g}}| \tag{19}$$

e no eixo $X$, onde há aceleração, e logo, uma força resultante, temos:

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{R_n}| = |\vec{\boldsymbol{F}}_{at_n}| = \mu_c|\vec{\boldsymbol{N}}_n| = \mu_c\ m_n\ g \tag{20}$$

onde $\vec{\boldsymbol{g}}$ é a aceleração da gravidade, o índice $n$ pode ser 1 ou 2 para o bloco cúbico e cilíndrico, respectivamente, e $\mu_c$ é o coeficiente de atrito da superfície, que de acordo com o enunciado é o mesmo para os blocos 1 e 2.

Utilizando a $2^a$ lei de Newton:

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{R_n}| = m_n|\vec{\boldsymbol{a}}_n| \tag{21}$$

e a eq. 20, podemos calcular o módulo da aceleração de cada bloco $\vec{\boldsymbol{a}}_n$:

$$\mu_c\ m_n\ g = m_n|\vec{\boldsymbol{a}}_n| \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{a}}_n| = \mu_c\ g \tag{22}$$

Note que as acelerações não dependem das massas de cada bloco. De fato, elas são iguais já que $\mu_c$ tem o mesmo valor valor para os dois blocos.

Como a aceleração é constante, podemos utilizar a equação de Torricelli para determinar a velocidade inicial de cada bloco. Considerando o instante final como sendo aquele em que cada bloco para, de forma que suas velocidades finais são nulas, temos:

$$|\vec{\boldsymbol{v}}_n^f|^2 = |\vec{\boldsymbol{v}}_n^0|^2 - 2|\vec{\boldsymbol{a}}_n|d_n \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{v}}_n^0|^2 = 2|\vec{\boldsymbol{a}}_n|d_n \tag{23}$$

onde utilizamos um sinal negativo para expressar que a aceleração tem sentido contrário ao do movimento.

Substituindo agora o módulo da aceleração calculado acima e a relação $d_1 = 3d_2$ informada pelo enunciado, obtemos:

$$\begin{aligned} |\vec{\boldsymbol{v}}_1^0|^2 &= 2\mu_c g d_1 = 2\mu_c\ g\ 3d_2 = 6\mu_c\ g d_2 \\ |\vec{\boldsymbol{v}}_2^0|^2 &= 2\mu_c\ g d_2 = 2\mu_c\ g d_2 \end{aligned} \tag{24}$$

de forma que $|\vec{\boldsymbol{v}}_1^0|^2 = 3|\vec{\boldsymbol{v}}_2^0|^2$.

Para calcular a energia cinética de cada bloco, precisamos ainda determinar suas massas. Para isso, utilizamos do enunciado a informação de que os blocos são feitos do mesmo material, portanto possuem a mesma densidade volumétrica $\rho$. Dessa forma:

$$\rho = \frac{m_n}{V_n} \quad \Rightarrow \quad m_n = \rho V_n \tag{25}$$

Utilizando as dimensões definidas na figura (e que $\pi \approx 3$), os volumes de cada bloco são:

$$\begin{aligned} V_1 &= a^3 \\ V_2 &= \pi r^2 h = 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{3}{4}a^3 \end{aligned} \tag{26}$$

Dessa maneira, as massas dos blocos valem:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho a^3 \\ m_2 &= \frac{3}{4}\rho a^3 \end{aligned} \tag{27}$$

de forma que $m_1 = (4/3)m_2$.

Finalmente, vamos calcular as energias cinéticas iniciais de cada bloco:

$$K_n = \frac{1}{2}\ m_n|\vec{\boldsymbol{v}}_n^0|^2 \tag{28}$$

Tomando a razão $K_1/K_2$:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{m_1|\vec{\boldsymbol{v}}_1^0|^2}{m_2|\vec{\boldsymbol{v}}_2^0|^2} = \frac{4}{3} \times 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{K_1}{K_2} = 4 \tag{29}$$

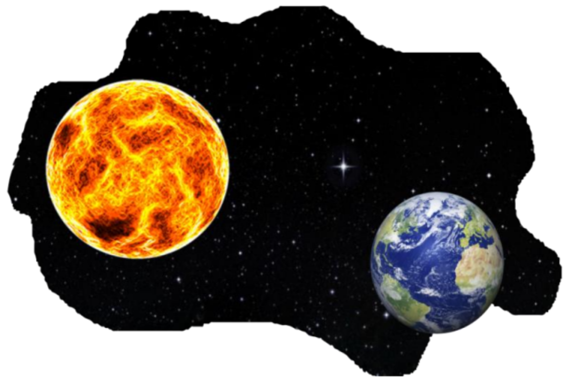
onde utilizamos as relações entre $m_1$ e $m_2$ e entre $|\vec{\boldsymbol{v}}_1^0|^2$ e $|\vec{\boldsymbol{v}}_2^0|^2$ obtidas acima.

**Resposta: A razão $K_1/K_2$ vale 4.**

**OBS:** Este problema também pode ser resolvido utilizando o teorema trabalho-energia. Basta igualar a variação de energia mecânica de cada bloco com o trabalho realizado pela força de atrito durante o deslocamento.

■

4. Sobre o nosso sistema solar existem muitas informações a serem desvendadas e outras já provadas cientificamente. É de conhecimento geral que luz viaja no vácuo com o maior valor possível assumido e que entre a Terra e Sol há predominância de vácuo. Considerando que a luz do Sol atinge a Terra em aproximadamente 8 minutos e 20 segundos, estime o valor da massa do Sol.



**Resolução:**

A lei da gravitação universal de Newton estabelece uma relação entre a força gravitacional $F_G$ entre dois corpos, suas respectivas massas ($M$ e $m$) e a distância $r$ entre eles da seguinte maneira:

$$F_G = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{30}$$

onde $F_G$ é o módulo da força de atração e $G$ é a constante gravitacional. Para este problema, vamos considerar $M$ como a massa do Sol e $m$ a massa da Terra.

A primeira lei de Kepler estabelece que todas as órbitas planetárias são elipses. No entanto, a excentricidade da órbita da Terra é muito baixa, ou seja, ela é muito próxima de um círculo. Por esse motivo, podemos tratar o movimento orbital como um movimento circular uniforme (MCU). A força de atração gravitacional sustenta esse movimento e é a resultante centrípeta. Assim, pela segunda lei de Newton:

$$F_G = ma_{cp} = m\omega^2 r, \tag{31}$$

onde $a_{cp}$ é a aceleração centrípeta, $\omega$ é a velocidade angular da Terra e $r$ é o raio da órbita $r$.

No MCU, a velocidade angular é dada pelo ângulo percorrido dividido pelo tempo gasto no deslocamento. Considerando uma volta completa, o deslocamento ângular será de $2\pi$ e o período de translação $T$ será de 1 ano, que é o tempo que a Terra leva para dar uma volta completa ao redor do Sol. Portanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{32}$$

Substituindo as expressões acima na equação 31:

$$F_G = m(\omega^2 r) = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \tag{33}$$

Utilizando a equação 30, obtemos:

$$G\frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \tag{34}$$

A distância entre o Sol e a Terra é igual ao tempo que a luz leva para viajar essa distancia multiplicado por sua própria velocidade $c$. Utilizando o dado do enunciado, obtemos:

$$r = ct = (3 \cdot 10^8\,\text{m/s}) \cdot (8\,\text{min} \cdot 60\,\text{s/min} + 20\,\text{s}) = 1500 \times 10^8\,\text{m} \tag{35}$$

O período orbital $T$, em segundos, é:

$$T = 1\,\text{ano} \cdot 31.536.000\,\text{s/ano} = 31.536.000\,\text{s}. \tag{36}$$

Portanto:

$$M = \frac{4(3)^2(1500 \times 10^8\,\text{m})^3}{(6,7 \cdot 10^{-11}\text{N.m}^2/\text{kg}^2)(31.536.000\,\text{s})^2}$$

$$M = 1.8 \times 10^{30}\,\text{kg} \approx 2 \times 10^{30}\,\text{kg} \tag{37}$$

**Resposta:**: A massa do Sol vale aproximadamente $2 \times 10^{30}$ kg.

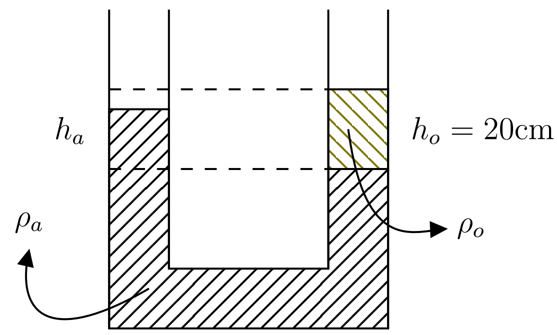
**OBS:** Note que a equação 34 representa matematicamente a terceira lei de Kepler para uma órbita circular, ou seja, a razão entre o quadrado do período orbital e o cubo do raio é uma constante.

■

5. Em um tubo de vidro de secção uniforme em forma de U e aberto nas extremidades há certa quantidade de água. Qual a variação do nível da água em um dos ramos, se no outro for adicionado uma coluna de 20 cm de óleo de densidade $0,8$ g/cm$^3$?

**Resolução:**

Se o líquido dentro do tubo está em equilíbro, sabemos que a pressão hidrostática sobre dois pontos que estão na mesma altura é sempre igual. Dessa forma, podemos dizer que a pressão hidrostática exercida pela coluna de óleo em sua base ($P_o$) é igual à causada por uma coluna de água no ramo oposto ($P_a$), como mostra a figura abaixo.




Com isso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_a &= P_o \\ \rho_a g h_a &= \rho_o g h_o \end{aligned} \tag{38}$$

onde $\rho_a$ e $\rho_o$ são, respectivamente, as densidades da água e do óleo, e $h_a$ e $h_o$ são as alturas das colunas de água e óleo medidas com relação à base da coluna de óleo.

Sabemos que a densidade da água vale 1 g/cm$^3$. Preservando as unidades, encontramos a altura da coluna de água em centímetros:

$$\begin{gathered} \rho_a \cancel{g} h_a = \rho_o \cancel{g} h_o \\ 1 \cdot h_a = 0.8 \cdot 20 \Longrightarrow h_a = 16cm \end{gathered} \tag{39}$$

Note agora que a altura $h_a$ dá o desnível entre as colunas de água nos dois ramos do tubo. Este desnível é resultado da redução do nível da água no ramo onde o óleo foi inserido e da subida do nível da água no ramo oposto. Como a água é um fluido incompressível, essas duas variações de nível devem ter o mesmo módulo. Assim, como a soma dos módulos dessas variações deve ser igual a $h_a$, concluímos que a variação em cada ramo deve ser, em módulo, igual a $h_a/2 = 8$ cm.

**Resposta:** A variação do nível da água em um dos ramos é de 8 cm.

■

6. Todos os seres humanos exibem cinco tipos diferentes de padrões elétricos ou "ondas cerebrais" ao longo do córtex, as quais podem ser observadas com um EEG (eletroencefalógrafo). Cada onda cerebral tem um propósito e ajuda a nos servir no funcionamento mental ideal. Determinada onda cerebral será dominante dependendo do estado de consciência em que você se encontra. Por exemplo, acredita-se que a onda gama de 40 Hz é importante para a ligação de nossos sentidos em relação à percepção e está envolvida na aprendizagem de novos materiais. Sendo esta, uma onda eletromagnética, qual o comprimento de onda associado à onda gama?

**Resolução:**

Podemos utilizar a relação fundamental $v = \lambda f$. Ou seja, a velocidade de propagação da onda ($v$) é igual ao comprimento da onda ($\lambda$) multiplicado por sua frequência ($f$). Sendo uma onda eletromagnética e supondo que a propagação se dá no vácuo, sua velocidade de propagação é dada pela velocidade da luz no vácuo, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. Com isso:

$$c = \lambda f \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{40 \text{ s}^{-1}} = \frac{3 \times 10^7}{4} \text{ m} = 7{,}5 \times 10^6 \text{ m} \tag{40}$$

**Resposta:** O comprimento de onda associado à onda gama é de $7{,}5 \times 10^6$ m.

■

7. Um barco de pesca artesanal, encontra-se no litoral brasileiro, no Oceano Atlântico, e sua carga desloca um peso de água salgada (massa específica 1,024 x $10^3$ kg/m$^3$) igual a 8,0 x $10^4$ N. Qual será o peso (em newtons) de água doce (massa específica 1,000 x $10^3$ kg/m$^3$) que o barco deslocará, nas mesmas condições de carregamento, ao ancorar em um porto da Amazônia?

**Resolução**

Na situação inicial, a carga do barco desloca um peso $P_s$ de água salgada. Note que este peso corresponde, em módulo, ao empuxo que a água salgada exerce sobre o barco. Assim, na situação de equilíbrio onde o barco flutua, o seu próprio peso $P_b$ deverá ser igual, em módulo, a este empuxo. Dessa forma, temos: $P_b = P_s =$ 8,0 x $10^4$ N.

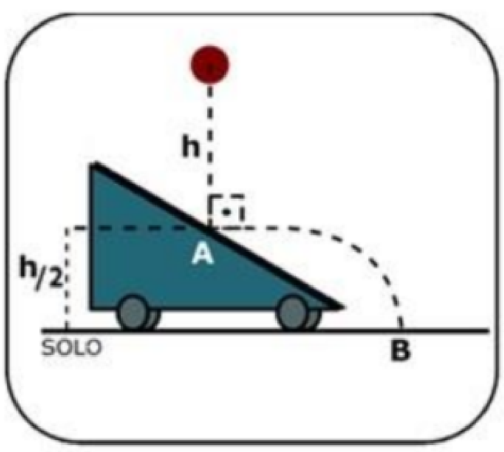
Considerando o mesmo barco com a mesma carga, o seu peso será igual na água doce. Utilizando o mesmo raciocínio, no equilíbrio, o peso de água doce deslocada $P_d$ (módulo do empuxo exercido pela água doce) será igual ao peso do barco $P_b$. Logo: $P_d = P_b =$ 8,0 x $10^4$ N.

**Resposta: O peso de água doce que o barco deslocará será igual a** 8,0 x $10^4$ N.

**OBS:** Note que a diferença entre as situações da água salgada e da água doce é que os volumes de fluidos deslocados serão diferentes como consequência das densidades diferentes.

■

8. Uma esfera de massa **m** é abandonada de uma altura **h** em relação ao ponto A no declive da cunha triangular de massa **M = 2m**, montada sobre rodas, conforme mostra figura abaixo. A esfera choca-se elasticamente com a cunha no ponto A, que se encontra a uma altura **h/2** do solo (ver figura) e após a colisão é lançada horizontalmente até atingir o solo no ponto B. Desprezando os efeitos de possíveis forças de resistência existentes no sistema, determine a velocidade da esfera ao atingir o ponto B.




**Resolução**

O primeiro passo é descobrir a velocidade $v_0$ que a esfera possui no momento em que atinge o ponto A. Para isso, utilizamos o princípio de conservação da energia mecânica, já que não há dissipação durante o movimento de queda dela. O instante inicial corresponde ao exposto na figura acima, onde a velocidade da esfera é nula, logo só há energia potencial $U_i$. Já no instante final a esfera encontra-se no ponto A, onde a energia potencial é nula (tomando este ponto como zero de energia) e só há energia cinética $K_f$. De acordo com a conservação da energia, obtemos:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ U_i &= K_f \\ \cancel{m}gh &= \cancel{m}\frac{{v_0}^2}{2} \\ v_0 &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{41}$$

Agora iremos calcular a velocidade horizontal $v_x$ da esfera logo após a colisão com a cunha. Considerando que a colisão ocorre durante um intervalo de tempo suficientemente pequeno de forma que a ação do peso da esfera é desprezível, podemos assumir que há conservação do momento linear do sistema. Além disso, como a colisão é elástica, há também conservação da energia cinética.

Para relacionar os momentos inicias e finais, vamos separá-los em suas componentes horizontal e vertical. Inicialmente, não temos movimento na horizontal, logo o momento horizontal do sistema é nulo. No final, a esfera possui velocidade horizontal $v_x$ para a direita e a cunha $V_x$ para a esquerda. Assim, a conservação do momento linear horizontal dá:

$$\begin{aligned} p_I &= p_F \\ 0 &= mv_x - MV_x \\ 2\cancel{m}V_x &= \cancel{m}v_x \\ V_x &= \frac{v_x}{2} \end{aligned} \tag{42}$$

Na vertical, a velocidade da esfera imediatamente antes da colisão tem módulo $v_0$ e, imediatamente após a colisão, somente a cunha adquire velocidade com uma componente vertical $V_y$, já que o lançamento da esfera é horizontal. A conservação do momento linear vertical nos dá:

$$\begin{aligned} mv_0 &= MV_y \\ \cancel{m}v_0 &= 2\cancel{m}V_y \\ V_y &= \frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2} \end{aligned} \tag{43}$$

Para a conservação da energia cinética, consideramos o módulo da velocidade final da cunha como $V^2 = {V_x}^2 + {V_y}^2$. Assim:

$$\begin{aligned} K_I &= K_F \\ m\frac{{v_0}^2}{2} &= m\frac{{v_x}^2}{2} + M\frac{V^2}{2} \\ \cancel{m}\frac{\cancel{2}gh}{\cancel{2}} &= \cancel{m}\frac{{v_x}^2}{2} + \cancel{2m}\frac{({V_x}^2 + {V_y}^2)}{\cancel{2}} \\ gh &= \frac{{v_x}^2}{2} + \frac{{v_x}^2}{4} + \frac{gh}{2} \\ \frac{gh}{2} &= \frac{2{v_x}^2 + {v_x}^2}{4} = \frac{3{v_x}^2}{4} \\ {v_x}^2 &= \frac{2gh}{3} \end{aligned} \tag{44}$$

Após o lançamento horizontal a partir do ponto A, podemos utilizar mais uma vez a conservação de energia para descobrir a velocidade da esfera no ponto B. Considerando agora a energia potencial no ponto B como zero, teremos:

$$\begin{aligned} U_A + K_A &= K_B \\ mg\frac{h}{2} + m\frac{v_x^2}{2} &= m\frac{v_B^2}{2} \\ mg\frac{h}{2} + m\frac{2gh}{6} &= m\frac{v_B^2}{2} \\ \\ v_B^2 &= gh + \frac{2gh}{3} \\ v_B &= \sqrt{\frac{5gh}{3}} \end{aligned} \tag{45}$$

**Resposta: A velocidade da esfera ao atingir o ponto B é igual a $\sqrt{\frac{5gh}{3}}$.**

**OBS:** Note que a componente vertical da velocidade $V_y$ adquirida pela cunha dará origem a uma colisão dela com o solo, possivelmente inelástica. No entanto, este fato não é relevante para a nossa análise, onde consideramos apenas o instante imediatamente após a colisão entre a esfera e a cunha e depois o movimento subsequente da esfera.

■

9. Um garoto está participando de uma corrida de carrinhos de rolimã cuja massa do conjunto (garoto mais carrinho) é de 50 kg e ele se encontra inicialmente em repouso. Contando com a ajuda de um amigo, o garoto é empurrado por uma força horizontal de 500 N que atua durante 1 s, até a linha de largada, iniciando a corrida. Considere que o trecho a ser percorrido durante a corrida é retilíneo com extensão de 50 m e que o mesmo entra em repouso no final do percurso. Determine o coeficiente de atrito entre a pista e o material das rodinhas do carrinho de rolimã neste percurso.

**Resolução**

Utilizando o teorema do impulso **I**, podemos calcular a velocidade $\mathbf{v_0}$ do conjunto (garoto mais carrinho) na linha de largada. Esse teorema implica que a aplicação de uma força **F** constante num conjunto ao longo de um intervalo de tempo $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}$ causa uma variação do momento linear $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}$. Sendo **m** a massa do conjunto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I &= F\Delta t = \Delta p = m\Delta v \\ 500\ \mathrm{N} \times 1\ \mathrm{s} &= 50\ \mathrm{kg} \times \mathrm{v_0} \\ v_0 &= \frac{500\ \cancel{kg}}{50\ \cancel{kg}} \times \frac{m}{\cancel{s^2}} \times \cancel{s} \\ v_0 &= 10\ \mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{46}$$

Assumindo que a aceleração **a** do conjunto é constante durante o percurso, podemos utilizar a equação de Torricelli para calculá-la, considerando o momento inicial na linha de largada e o repouso no instante final:

$$\begin{aligned} {v_f}^2 &= {v_0}^2 + 2a\Delta x \\ 0 &= 10^2(\mathrm{m/s})^2 + 2a \times 50\ \mathrm{m} \\ a &= -\frac{100\ \mathrm{m}^{\cancel{2}}}{100\ \mathrm{s}^2\ \cancel{m}} \\ a &= -\ 1\ \mathrm{m/s^2} \end{aligned} \tag{47}$$

onde o sinal negativo indica que ela atua no sentido de freiar o movimento.

Para calcular o coeficiente de atrito cinético $\mu$, precisamos da força normal **N** que a pista exerce sobre o conjunto, a qual está em equilíbrio na vertical com a força peso **P**. Assim:

$$\begin{aligned} N &= P = mg \\ N &= 50\ \mathrm{kg} \times 10\ \mathrm{m/s^2} \\ N &= 500\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{48}$$

Utilizando agora a segunda lei de Newton para a direção horizontal e a relação entre os módulos das forças de atrito cinético e normal, podemos encontrar $\mu$:

$$\begin{aligned} f_{at} &= \mu N = m|a| \\ \mu &= \frac{ma}{N} = \frac{50\ \mathrm{kg} \times 1\ \mathrm{m/s^2}}{500\ \mathrm{N}} \\ \mu &= 0{,}1 \end{aligned} \tag{49}$$

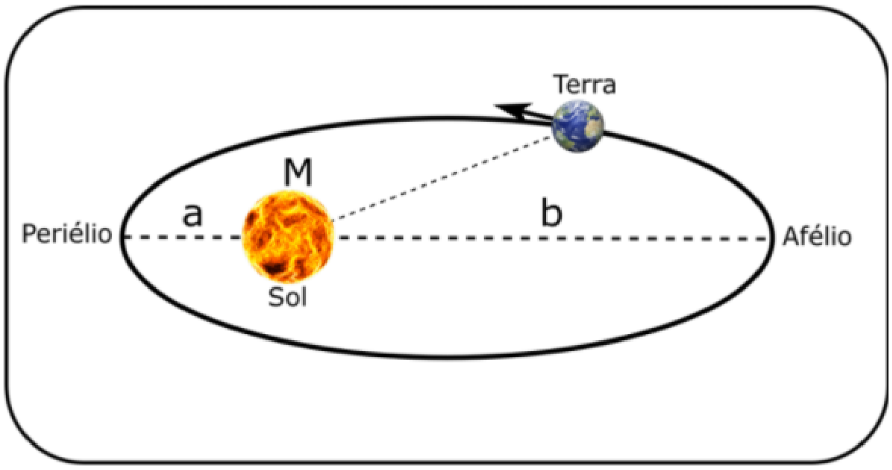
Note que utilizamos o módulo de $a$ na expressão acima, pois calculamos o módulo da força de atrito e da força resultante.

**Resposta: O coeficiente de atrito entre a pista e o material das rodinhas do carrinho de rolimã vale 0,1 neste percurso.**

**OBS:** Note que a força de atrito cinético é constante, de forma que a força resultante e a aceleração também são constantes. Por isso utilizamos essa hipótese no raciocínio que levou à equação 47.

■

10. Diante da polêmica que ocorreu sobre as teorias do geocentrismo e do heliocentrismo, Kepler foi o grande responsável pela reformulação de leis que terminariam com parte das polêmicas. Entre elas podemos citar a Lei das Órbitas, em que os astros descrevem trajetória elíptica em torno do Sol. A figura abaixo mostra esquematicamente a órbita da Terra, de modo que em dado momento ela passa pelo periélio e depois pelo afélio. Sendo $M$ a massa do Sol, $G$ a constante universal de gravitação, $a$ a distância do periélio ao Sol e $b$ do afélio ao Sol, determine o valor da velocidade máxima da Terra em sua órbita.




**Resolução:**

Pela lei da gravitação universal de Newton, a força de atração entre dois corpos ($F_g$) é proporcional às suas massas e ao inverso do quadrado da distância entre seus centros. Para a atração entre o Sol e a Terra, podemos escrever:

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} \tag{50}$$

onde, $M$ é a massa do Sol, $m$ a massa da Terra e $r$ é a distância entre seus centros. $G$ é a constante gravitacional.

Esta força sustenta o movimento orbital da Terra, de forma que ela representa a força resultante que atua sobre ela. Supondo que este movimento é aproximadamente circular (ou seja, que a excentricidade da órbita elíptica é pequena), podemos escrever esta resultante como uma resultante centrípeta, ou seja, $F_{res} = ma_{cp} = mv^2/r$, onde $v$ é a velocidade escalar do centro da Terra. Com isso, a segunda lei de Newton dá:

$$\frac{1}{r}mv^2 = G\frac{Mm}{r^2} \tag{51}$$

A equação acima nos permite determinar a velocidade da Terra para uma distância $r$ genérica como:

$$v = \sqrt{G\frac{Mm}{r}} \tag{52}$$

Pereba que, quanto menor é a distância entre a Terra e o Sol, maior é a velocidade da Terra. Portanto, a velocidade máxima deve ocorrer no ponto da órbita de maior aproximação (menor $r$), que é o Periélio. Como $r = a$ neste ponto, obtemos

$$v_{max} = \sqrt{G\frac{Mm}{a}} \tag{53}$$

**OBS:** Note que o fenômeno abordado nessa questão também está relacionado com a segunda lei de Kepler, a lei das áreas. Ela afirma que a reta imaginária que liga um planeta até o Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Se o raio vetor ($r$) é menor, a distância percorrida ao longo da órbita durante um intervalo de tempo fixo deve ser maior para que a área varrida seja a mesma, o que resulta em uma velocidade maior. Com isso, vemos novamente que a maior velocidade ocorre no ponto de maior aproximação.

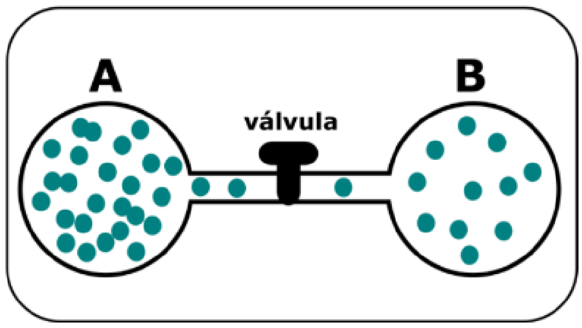
**Resposta:** A velocidade máxima da Terra vale $\sqrt{GMm/a}$ e ocorre no Periélio.

■

11. A figura abaixo mostra duas ampolas iguais de vidro A e B, contendo o mesmo gás monoatômico. A comunicação entre as ampolas é possível, graças a um fino tubo(volume desprezível) provido de uma válvula inicialmente fechada . O gás da ampola A está sob pressão $2P$ e temperatura $2T$, enquanto que o da ampola B está sob pressão $P$ e temperatura $T$. Abrindo-se a válvula os gases se misturam até atingir o equilíbrio térmico. Desprezando as trocas de calor com o meio externo, determine a temperatura da mistura dos gases das ampolas após o sistema entrar em equilíbrio térmico.

**Resolução:**

Primeiro, vamos identificar o processo em questão. O sistema A+B sofre um processo adiabático, pois não troca calor com o meio ($Q = 0$) e um processo isocórico/isovolumétrico por manter um volume




constante. Consequentemente, não foi realizado trabalho ($W = 0$). Dessa forma, a variação da energia interna do sistema A+B será zero ($\Delta U = 0$), já que pela 1ª lei da termodinâmica:

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - W \\ \Delta U &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Como a energia interna não varia, a energia interna inicial ($U_i$) deve ser igual à final($U_f$). Além disso, a energia interna inicial é a soma das energias dos sistemas A e B isolados:

$$\begin{aligned} U_i &= U_f \\ U_A + U_B &= U_f \end{aligned} \tag{55}$$

Como estamos lidando com um gás monoatômico, a energia interna pode ser calculada via:

$$U = \frac{3}{2} nRT \tag{56}$$

onde $n$ é o número de moles do gás e $T$ é a temperatura absoluta dele.

Pela lei dos gases ideais, podemos descobrir a relação entre os números de mols de gás em cada ampola. Os valores de temperatura e pressão foram dados no enunciado e o volume de cada ampola é o mesmo ($V$), uma vez que são idênticas. Com isso:

$$\begin{aligned} (2P)V &= n_A R(2T) & \qquad PV &= n_B RT \\ n_A &= \frac{\cancel{2}RT}{\cancel{2}PV} & \qquad n_B &= \frac{RT}{PV} \end{aligned} \tag{57}$$

Portanto, vemos que $n_A = n_B = n$. Na situação final, o número de mols total do gás é $n_A + n_B = 2n$, já que os gases se misturam quando a válvula é aberta. Finalmente, aplicando a equação 55, encontramos a temperatura final do gás ($T_F$):

$$\begin{aligned} U_A + U_B &= U_f \\ \frac{3}{2}nR\,(2T) + \frac{3}{2}nR\;T &= \frac{3}{2}(2n)R\;T_F \\ \frac{9}{2}nR\;T &= \frac{6}{2}nR\;T_F \\ T_F &= \frac{3}{2}T \end{aligned} \tag{58}$$

**RESPOSTA : Após a mistura atingir o equilíbrio térmico, sua temperatura será $(3/2)T$.**

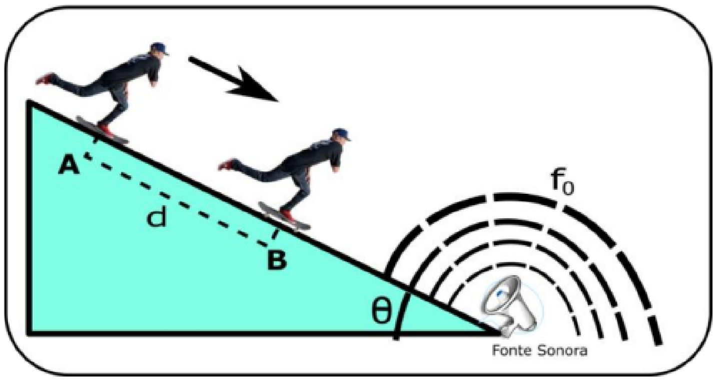
**OBS:** Pelo teorema da equipartição da energia, para cada grau de liberdade adiciona-se $(1/2)nRT$ para a energia interna ($U$). Um gás monoatômico pode mover-se em 3 dimensões diferentes, por isso tem 3 graus de liberdade e $U = (3/2)nRT$.

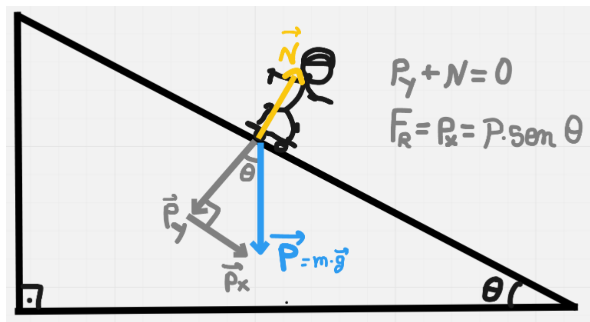
■

12. A figura abaixo mostra uma rampa de inclinação $\theta$, de modo que em sua base têm-se um alto-falante que emite um som musical de frequência $\mathbf{f_0}$. Do ponto A do plano um **skatista** inicia seu movimento de descida. Desprezando os atritos, e considerando $\mathbf{V_S}$ a velocidade do som no ar,determine a variação da frequência do som musical escutado pelo **skatista** ao se deslocar do ponto A até o ponto B, afastados entre si por uma distância **d** sobre o plano.

**Resolução:**

O problema trata do efeito doppler e para medí-lo precisamos determinar a velocidade do skatista nos pontos A e B.




O skatista inicia seu movimento no ponto A de modo que sua velocidade em A será $V_A = 0$. Já no ponto B a velocidade se altera devido a influência da força peso. Faça um diagrama de forças para observar a aceleração resultante sob o skatista, como abaixo.

Note que ao decompor a força peso, a componente $P_y$ se anula com a Normal, de modo que a força resultante ($F_R$) sob o skatista é dada pela componente $P_x$.

$$F_R = P_x \tag{59}$$

E, pelas relações trigonométricas, encontramos $P_x = P\text{sen}(\theta)$. Por isso:

$$F_R = P \text{ sen } \theta \tag{60}$$

Assim, considerando o módulo da aceleração da gravidade como $g$, vemos pela 2ª lei de Newton que a aceleração resultante $a$ terá módulo igual a:

$$\begin{aligned} F_R &= m\ g \text{ sen } \theta \\ m\ a &= m\ g \text{ sen } \theta \\ a &= g \text{ sen } \theta \end{aligned} \tag{61}$$

Com isso, como a aceleração é constante, podemos usar a eq. de Torricelli para achar a velocidade no ponto B ($V_B$) após percorrida uma distância $d$:

$$\begin{aligned} V_B^2 &= V_A^2 + 2ad \\ V_B &= \sqrt{2g \text{ sen}(\theta) d} \end{aligned} \tag{62}$$

Por fim, a partir do efeito Doppler, obtemos a diferença entre as frequências escutadas ($\Delta f$). Observe que a velocidade do skatista será somada à velocidade do som ($V_S$) porque ele se aproxima da fonte. Assim:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_B - f_A \\ \Delta f &= f_0 \frac{V_S + V_B}{V_S} - f_0 \frac{V_S + V_A}{V_S} \\ \Delta f &= f_0 \frac{V_S + \sqrt{2g \text{ sen}(\theta) d}}{V_S} - f_0 \frac{V_S + 0}{V_S} \\ \Delta f &= \frac{f_0}{V_S} (\cancel{V_S} + \sqrt{2g \text{ sen}(\theta) d} - \cancel{V_S}) \\ \Delta f &= \frac{f_0}{V_S} \sqrt{2g\text{sen}(\theta) d} \end{aligned} \tag{63}$$

**RESPOSTA: A variação da frequência do som musical é dada por $\Delta f = \frac{f_0}{V_S}\sqrt{2g\text{sen}(\theta)d}$.**

■